



ANÁLISE DE VIBRAÇÕES LATERAIS DE LINHAS DE EIXO DE NAVIOS UTILIZANDO O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Jorge Vieira Simões Wanderley Junior

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Oceânica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Oceânica.

Orientador: Severino Fonseca da Silva Neto

Rio de Janeiro
Maio de 2018

ANÁLISE DE VIBRAÇÕES LATERAIS DE LINHAS DE EIXO DE NAVIOS
UTILIZANDO O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Jorge Vieira Simões Wanderley Junior

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE
ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA
OCEÂNICA.

Examinada por:

Prof. Severino Fonseca da Silva Neto, D.Sc.

Prof. Luiz Antonio Vaz Pinto, D.Sc.

Prof. Fernando Augusto de Noronha Castro Pinto, Dr.-Ing.

Prof. Ulisses Admar Barbosa Vicente Monteiro, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
MAIO DE 2018

Wanderley Junior, Jorge Vieira Simões

Análise de Vibrações Laterais de Linhas de Eixo de Navios utilizando o Método de Elementos Finitos/Jorge Vieira Simões Wanderley Junior. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2018.

XIV, 103 p.: il.; 29,7cm.

Orientador: Severino Fonseca da Silva Neto

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Oceânica, 2018.

Referências Bibliográficas: p. 100 – 102.

1. Vibrações laterais. 2. Frequências de whirling.
3. Velocidades críticas. I. Silva Neto, Severino Fonseca da. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Oceânica. III. Título.

*Dedico este trabalho a toda
minha família pelo incentivo e
principalmente pelo apoio total
nesse período de estudo dedicado
à minha pós-graduação.*

Agradecimentos

Em primeiro lugar, quero agradecer a Deus, que sempre me deu saúde, paz e me orientou ilimitadamente na minha caminhada, me ensinando a superar os obstáculos naturais da vida.

Gostaria de agradecer à minha família, irmã, avó e amigos. Em especial aos meus pais que, além de amor e carinho, ofereceram um estudo de qualidade em boas escolas e sempre me apoiaram em todas as minhas decisões. À minha esposa pela dedicação à família, por ajudar nos momentos difíceis e pelo suporte incondicional.

Também sou grato à Marinha do Brasil, que me proporcionou a chance de aprimorar os meus conhecimentos técnicos, permitindo que eu estudasse integralmente em uma universidade de excelência e principalmente pela confiança em mim depositada na escolha do oficial para representá-la, realizando este curso externamente.

Expresso os meus agradecimentos ao Diretor de Engenharia Naval Contra-almirante (EN) Ivan Taveira Martins pelo incentivo e apoio oferecido, ao meu orientador técnico Capitão de corveta Jeferson Ferreira de Oliveira pela ajuda e amizade e ao meu orientador acadêmico professor doutor Severino pela atenção e cordialidade dispensada.

Por último, gostaria de mostrar a minha notável gratidão à equipe, técnicos, professores e pesquisadores do LEDAV, o laboratório que me acolheu com carinho por 2 anos, em especial por toda a atenção, paciência e ensinamentos passados aos engenheiros Professor Luiz Vaz, pesquisador Antonio Carlos Troyman, Ulisses Admar Barbosa Vicente Monteiro e Ricardo Homero Gutiérrez.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ANÁLISE DE VIBRAÇÕES LATERAIS DE LINHAS DE EIXO DE NAVIOS UTILIZANDO O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Jorge Vieira Simões Wanderley Junior

Maio/2018

Orientador: Severino Fonseca da Silva Neto

Programa: Engenharia Oceânica

Apresenta-se, neste trabalho, a implementação de uma metodologia para a realização da análise numérica das vibrações laterais de linhas de eixo de sistemas de propulsão marítima. Uma linha de eixo propulsor é um tipo de rotor em balanço com uma massa concentrada na extremidade e esta configuração ocasiona particularmente alguns efeitos de inércia e o efeito giroscópico sobre o hélice, o qual geralmente não é levado em conta na maioria dos projetos de máquinas rotativas. O efeito giroscópico está associado à variação do sentido da quantidade de movimento angular, que faz com que o eixo apresente movimento de precessão e, com isso, as frequências naturais de flexões transversais deixam de ser independentes e se acoplam, gerando as frequências naturais de precessão. Então, cada ponto do eixo passa a ter movimentos elípticos formando órbitas que variam em função das características dinâmicas, carregamentos, condições de contorno e principalmente da velocidade de rotação. Serão apresentadas as equações diferenciais de movimento no meio contínuo, que podem ser resolvidas analiticamente mas o sistema será discretizado para ser resolvido de forma numérica. Devido à complexidade do sistema e aos inúmeros graus de liberdade, o problema será solucionado pelo método de elementos finitos em um programa comercial. Os principais resultados obtidos foram a obtenção das frequências naturais para a faixa operativa de rotações, os seus respectivos modos de precessão direta e retrógrada e a determinação das velocidades críticas.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

ANALYSIS OF LATERAL VIBRATIONS OF SHAFT LINES OF VESSELS USING THE FINITE ELEMENT METHOD

Jorge Vieira Simões Wanderley Junior

May/2018

Advisor: Severino Fonseca da Silva Neto

Department: Ocean Engineering

The present work presents the implementation of a methodology for the numerical analysis of the lateral vibrations of the axis lines of marine propulsion systems. A propeller shaft line is a rocking rotor type with a mass concentrated at the end and this configuration causes in particular some inertia effects and the gyroscopic effect on the propeller, which is generally not taken into account in most designs of rotary machines. The gyroscopic effect is associated with the variation of the sense of the amount of angular momentum, which causes the axis to exhibit precession movement and, therefore, the natural frequencies of transverse flexions are no longer independent and are coupled, generating natural precession frequencies. Then, each point of the axis starts to have elliptical movements forming orbits that vary according to the dynamic characteristics, loads, boundary conditions and especially the speed of rotation. It will be presented the differential equations of motion in the continuous medium, which can be solved analytically but the system will be discretized to be solved numerically. Due to the complexity of the system and the numerous degrees of freedom, the problem will be solved by the finite element method in a commercial program. The main results were obtained the natural frequencies for the operating range of revolutions, their respective modes of direct and retrograde precession and the determination of critical speeds.

Sumário

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiv
1 Introdução	1
1.1 Histórico	2
1.2 Motivação	4
1.3 Objetivos	4
1.4 Organização da Dissertação	5
2 Revisão Bibliográfica	7
2.1 Conclusões da Revisão Bibliográfica	13
3 Fundamentos Teóricos	15
3.1 Conceitos básicos sobre dinâmica de rotores	15
3.1.1 Efeito giroscópico	15
3.1.2 Excitação síncrona	17
3.1.3 Excitação assíncrona	17
3.1.4 Diagrama de Campbell	17
3.1.5 Velocidades críticas	18
3.1.6 Gráfico de órbitas	19
3.1.7 Diagrama de Bode	19
3.2 Desenvolvimento da Solução	20
3.2.1 Equações diferenciais do eixo	21
3.2.2 Separação de Variáveis	23
3.2.3 Solução do problema	26
3.2.4 Condições de contorno	29
3.3 A dinâmica dos rotores	29
3.3.1 Energia cinética do disco	32
3.3.2 Energia potencial do eixo	34
3.3.3 Energia cinética do eixo	36

3.3.4	A função dos mancais	36
3.3.5	A equação de Lagrange	40
3.3.6	Movimento de vibração livre	41
3.3.7	Movimento com vibração forçada	43
4	Metodologia de análise	52
4.1	Modelagem da linha de eixo	52
4.1.1	Premissas adotadas	52
4.2	Fluxograma	53
5	Avaliação da metodologia proposta	57
5.1	1º) Linha de eixo do Navio USS Observation Island	57
5.1.1	Comparação das frequências naturais	59
5.1.2	Comparação dos modos laterais de flexão	60
5.1.3	Gráfico de órbitas	63
5.1.4	Diagrama de Campbell	65
5.1.5	Diagrama de Bode	66
5.2	2º) Rotor em balanço com 1 disco na extremidade	69
5.2.1	A influência de uma massa em balanço sobre as frequências naturais	70
5.2.2	A influência dos momentos giroscópicos sobre as frequências naturais	74
5.2.3	Mapa de velocidades críticas	76
6	Estudo de Casos	81
6.1	Linha de eixo de um navio AHTS	81
6.1.1	Comparação de frequências naturais e formas modais	83
6.1.2	Gráfico de órbitas	85
6.1.3	Gráfico de Campbell	86
6.1.4	Diagrama de Bode	88
6.2	Linha de eixo de um navio militar	90
6.2.1	Elementos da linha de eixo	90
6.2.2	Modelo Numérico	91
6.2.3	Resultados	93
6.2.4	Gráfico de órbitas	94
6.2.5	Diagrama de Campbell	95
6.2.6	Diagrama de Bode	96
7	Conclusões e recomendações	98
	Referências Bibliográficas	100

Lista de Figuras

1.1	Sistema propulsor marítimo.	2
1.2	Movimento de precessão no eixo - direta(a) e retrógrada(b).	3
1.3	Trincas no pé de galinha.	4
3.1	Momentos aplicados sobre o disco de um rotor em balanço.	16
3.2	Ângulos de <i>Euler</i>	16
3.3	Tipos de precessão.	17
3.4	Diagrama de Campbell.	18
3.5	Exemplo do gráfico de órbitas de uma linha de eixo.	19
3.6	Diagrama de Bode.	20
3.7	Elemento de viga de Timoshenko.	21
3.8	Discretização do eixo.	27
3.9	Relações do sistema de coordenadas.	30
3.10	Exemplo de um rotor em balanço com 2 mancais, GENTA (2007). . .	31
3.11	Modelo de rigidez e amortecimento de mancal de deslizamento. . . .	37
3.12	Associação de molas dos elementos de suporte.	38
3.13	Geometria de mancal <i>Tilting Pad</i>	39
3.14	Curva dos coeficientes dinâmicos de mancais <i>Tilting Pad</i>	40
3.15	Massa desbalanceadora.	48
3.16	Condições para os tipos de precessão	49
3.17	Resposta ao desbalanceamento (amplitude e fase)	50
4.1	Modelo da linha de eixo em elementos finitos.	53
4.2	Fluxograma da metodologia.	53
5.1	Linha de eixo do USS Observation Island/modelo com seções e molas. .	58
5.2	Geometria do modelo discretizado.	59
5.3	Primeiro modo na direção Y (Ansys).	60
5.4	Primeiro modo na direção Y (GBRC-3).	60
5.5	Primeiro modo na direção Z (Ansys).	61
5.6	Primeiro modo na direção Z (GBRC-3).	61
5.7	Segundo modo na direção Z (Ansys).	62

5.8	Segundo modo na direção Z (GBRC-3).	62
5.9	Terceiro modo na direção Z (Ansys).	63
5.10	Terceiro modo na direção Z (GBRC-3).	63
5.11	Órbitas do primeiro modo de precessão direta.	64
5.12	Órbitas do segundo modo de precessão direta.	64
5.13	Órbitas do terceiro modo de precessão direta.	64
5.14	Diagrama de Campbell ($h=1$).	65
5.15	Diagrama de Campbell ($h=2$).	66
5.16	Amplitude de resposta X Frequência.	67
5.17	Fase de resposta X Frequência.	68
5.18	Amplitude de resposta X Frequência.	68
5.19	Fase de resposta X Frequência.	69
5.20	Rotores com disco em balanço a 6, 12 e 18 polegadas, respectivamente.	70
5.21	Gráfico de órbitas do primeiro modo de precessão com mancais rígidos.	71
5.22	Gráfico de órbitas do segundo modo de precessão com mancais rígidos.	72
5.23	Gráfico de órbitas do terceiro modo de precessão com mancais flexíveis.	73
5.24	Gráfico de órbitas do terceiro modo de precessão com mancais rígidos.	73
5.25	Rotores com discos diferentes a 18 polegadas em balanço.	74
5.26	Influência do efeito giroscópico sobre o primeiro modo.	75
5.27	Influência do efeito giroscópico sobre o segundo modo.	76
5.28	Influência do efeito giroscópico no mapa de velocidades críticas - VANCE <i>et al.</i> (2010).	77
5.29	Influência do efeito giroscópico no mapa de velocidades críticas - Ansys.	77
5.30	Influência do efeito giroscópico no MVC sem o efeito da massa em balanço - VANCE <i>et al.</i> (2010).	78
5.31	Influência do efeito giroscópico no MVC sem o efeito da massa em balanço - Ansys.	79
6.1	Modelo geométrico da linha de eixo de um navio AHTS.	82
6.2	Modelo da linha de eixo do AHTS Bossa Nova.	83
6.3	3 primeiros modos de precessão retrógrada (Caterpillar).	84
6.4	3 primeiros modos de precessão retrógrada (Ansys).	84
6.5	3 primeiros modos de precessão direta (Caterpillar).	85
6.6	3 primeiros modos de precessão direta (Ansys).	85
6.7	Diagrama de órbitas - modo 1.	86
6.8	Diagrama de órbitas - modo 2.	86
6.9	Diagrama de órbitas - modo 3.	86
6.10	Diagrama de Campbell ($h = 1$).	87
6.11	Diagrama de Campbell ($h = 4$).	87

6.12	Amplitude de resposta X Frequência.	89
6.13	Fase X Frequência.	89
6.14	Projeto do eixo propulsor.	90
6.15	Modelo de mancais, flanges e acoplamentos.	92
6.16	Malha do modelo.	92
6.17	Modos de flexão lateral - Nauticus	93
6.18	Modos de flexão lateral - ANSYS	94
6.19	Gráfico de órbitas do primeiro modo de precessão.	94
6.20	Gráfico de órbitas do segundo modo de precessão.	95
6.21	Gráfico de Campbell (h=1).	95
6.22	Gráfico de Campbell (h=4).	96
6.23	Resposta ao desbalanceamento no domínio da frequência (amplitude).	97
6.24	Resposta ao desbalanceamento no domínio da frequência (fase).	97

Lista de Tabelas

5.1	Comparação das frequências naturais	60
5.2	Características gerais do rotor	70
5.3	Frequências naturais do primeiro modo de vibração com mancais rígidos	71
5.4	Frequências naturais do segundo modo de vibração com mancais rígidos	72
5.5	Frequências naturais do terceiro modo de vibração com mancais flexíveis	73
5.6	Frequências naturais do terceiro modo de vibração com mancais rígidos	74
5.7	Frequência natural do primeiro modo retrógrado em $\Omega = 5000 \text{ rpm}$.	75
5.8	Frequência natural do primeiro modo direto em $\Omega = 5000 \text{ rpm}$	75
5.9	Frequência natural do segundo modo direto em $\Omega = 5000 \text{ rpm}$	76
6.1	Dados do propulsor	81
6.2	Informações sobre os mancais	82
6.3	Frequências naturais dos 3 primeiros modos diretos e retrógrados (rpm)	83
6.4	Características do eixo propulsor	90
6.5	Elementos fundamentais da linha de eixo	91
6.6	Frequências naturais de vibração lateral quando $\Omega = 250 \text{ rpm}$	93
A.1	Dados de entrada	103

Capítulo 1

Introdução

Um sistema de propulsão marítima é fundamental para o funcionamento de uma embarcação, pois ele que garante o movimento do navio com o controle da velocidade de navegação desejada. Além disso, ele influencia em outras partes do navio nas quais está diretamente ligado, causando efeitos na operação, na segurança e no conforto, sendo, portanto, crucial a necessidade de se estudar a linha de eixo a fim de prever o seu comportamento. O eixo intermediário, o qual compõe o sistema propulsor e é o objeto de estudo deste trabalho, é composto pelo eixo rotativo, geralmente metálico, por alguns acoplamentos que unem as seções, os mancais de sustentação que ficam engastados na fundação do navio, o hélice em uma extremidade e a caixa redutora de velocidades na outra ponta, que delimita o sistema a ser estudado neste caso.

A análise completa de uma linha de eixo na fase de projeto se divide nas partes estática e dinâmica. O estudo da parte estática é realizado primeiramente pelo alinhamento do eixo, que é um procedimento realizado para homogeneizar as forças de reação nos mancais com o eixo parado. Inicialmente, é construída a matriz dos coeficientes de influência do sistema eixo-mancais, onde são impostos pequenos deslocamentos verticais na linha de eixo e são medidas as forças reativas que aparecem. Então, baseado na matriz de flexibilidade, as posições longitudinais de cada mancal vão sendo alteradas a fim de se otimizar a distribuição das cargas verticais nos mancais. Como premissa para este trabalho, será admitido que o eixo já está devidamente alinhado.

Por outro lado, o estudo da parte dinâmica estuda o comportamento da linha de eixo em condições operativas, com o eixo girando e sendo perturbado por agentes externos. Os principais movimentos de uma linha de eixo são: vibração torcional, vibração lateral e vibração axial. O estudo dessas vibrações visa estimar os deslocamentos e tensões em todos os pontos da linha de eixo e nas estruturas

adjacentes para cada velocidade de operação.

As forças externas mais comuns num sistema de eixos propulsores são o torque, que é oferecido pela redutora da máquina do navio ao eixo para garantir a sua velocidade de rotação própria Ω , e origina os modos torcionais de vibração, o desbalanceamento do rotor, que gera as forças centrífugas responsáveis pelas vibrações transversais ao eixo e o empuxo reativo no hélice, que excita o eixo axialmente.

Todas essas e quaisquer outras perturbações precisam ser estimadas e analisadas, preferencialmente na fase de concepção do projeto de um sistema de eixo propulsor, a fim de evitar o fenômeno da ressonância, onde as respostas têm amplitude máxima e as chances de danificar ou quebrar algum equipamento são muito maiores.

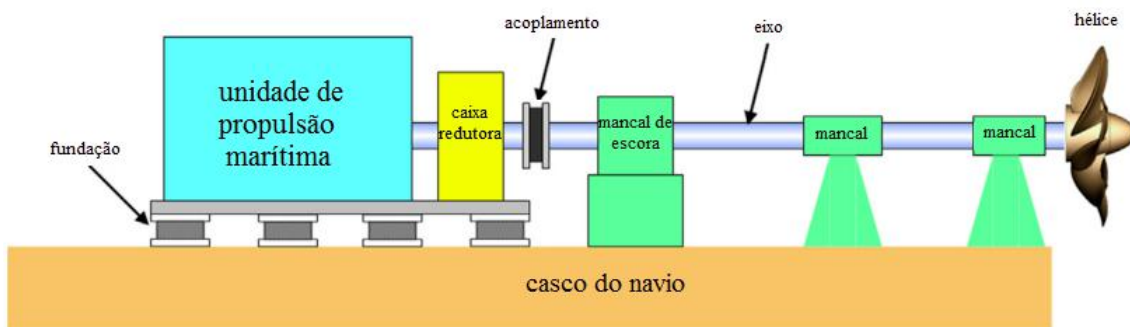


Figura 1.1: *Esquema geral de um sistema propulsor marítimo.*

1.1 Histórico

Ultimamente, com o avanço da otimização dos perfis estruturais na região da popa, alguns elementos têm ficado mais flexíveis, alterando as condições de rigidez no problema de vibração e facilitando a transmissão de esforços. Tem se tornado bastante frequente o aparecimento de problemas na região do sistema propulsor em navios com linhas de eixo longas e esbeltas, em virtude do excesso de vibrações.

Uma linha de eixo é um exemplo clássico de um rotor em balanço e inevitavelmente o eixo vibra realizando o movimento de precessão (Fig. 1.2). Essas rotações do eixo em torno do centro de gravidade causam deformações, as quais implicam diretamente nas tensões e, portanto devem ser controladas para não atingirem valores críticos.

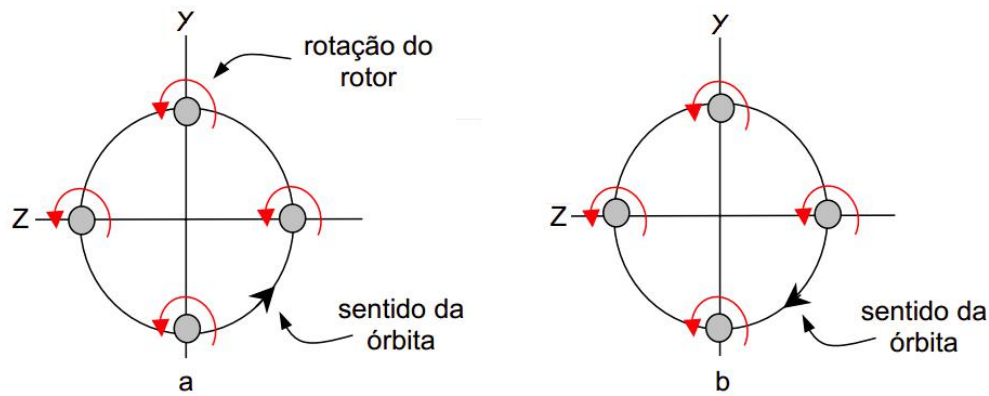


Figura 1.2: *Movimento de precessão no eixo - direta(a) e retrógrada(b).*

As principais fontes dos movimentos de precessão em sistemas de propulsão são as seguintes:

- ⇨ A oscilação das forças hidrodinâmicas atuantes no hélice;
- ⇨ As forças de excitação radial em motores alternativos;
- ⇨ A variação da pressão no fluido lubrificante no plano dos mancais de deslizamento;
- ⇨ Forças de fricção no material do eixo e seus acoplamentos;
- ⇨ O desbalanceamento do eixo;
- ⇨ O desalinhamento do eixo por erros de montagem ou defeitos de fabricação.

A precessão em excesso influencia negativamente em determinados elementos do sistema de propulsão, podendo comprometer a integridade de todo o sistema e gerar grandes danos à embarcação, conforme o exemplo na Fig. 1.3. Os seguintes problemas podem ser causados por esse tipo de vibração:

- ◇ Destruição completa do sistema de eixo;
- ◇ Desgaste do eixo e redução de sua vida útil;
- ◇ Fissuras de fadiga nos suportes do eixo e na fundação;
- ◇ Danos por fadiga no mancal do tubo telescópico;
- ◇ Aumento do desgaste e danos na vedação;
- ◇ Ruído demasiado, vibrações no casco e superestrutura.



Figura 1.3: *Trincas no pé de galinha.*

1.2 Motivação

Um navio militar prescinde da capacidade de desenvolver altas velocidades operativas a qualquer momento, seja em situações de exercício ou num cenário real de guerra, portanto, o seu sistema de propulsão é extremamente importante para o sucesso de uma operação, devendo o mesmo estar sempre operativo e nas melhores condições possíveis, pois nunca se sabe o instante exato em que ele será requisitado a operar com a potência máxima e, caso haja falha, toda a tripulação estará em risco comprometendo centenas de vidas.

Em virtude da diversidade e do grande número de problemas recentes nos sistemas propulsores de navios militares da Marinha do Brasil, foi percebida a necessidade de se criar uma metodologia de análise para prever e/ou avaliar o comportamento dinâmico das linhas de eixo. Entretanto, essa metodologia proposta pode ser utilizada para analisar as vibrações laterais da linha de eixo de qualquer tipo de navio, independentemente do seu propósito.

1.3 Objetivos

A ideia principal deste trabalho é elaborar um procedimento técnico de análise de linhas de eixo propulsores que possibilite reduzir o nível de suas vibrações laterais, oferecendo alternativas para operar nas melhores condições possíveis, pois o excesso de vibrações pode afetar bruscamente o desempenho do sistema propulsor, implicando em maior consumo de combustível, desgaste prematuro dos equipamentos e um alto custo de manutenção corretiva.

Este trabalho visa implementar uma metodologia, utilizando elementos finitos, para analisar o comportamento dinâmico da linha de eixos de um sistema de propulsão marítima, facilitando a compreensão dos fenômenos que ocorrem em máquinas rotativas e prever os movimentos transversais do eixo através da resposta em vibração livre e quando submetido às excitações externas, como o torque, o empuxo e o próprio desbalanceamento.

Os principais objetivos da proposta de dissertação são:

- Obter as frequências naturais de vibração lateral da linha de eixo e seus respectivos modos de precessão diretos e retrógrados;
- Obter as amplitudes de resposta ao longo do eixo, que são os raios das órbitas elípticas, principalmente nas proximidades dos mancais a fim de se analisar ou dimensionar as folgas das peças durante o projeto básico da linha de eixo propulsor;
- Identificar, através do Diagrama de Campbell, as velocidades críticas de rotação a fim de se estabelecer as faixas de velocidade em que o eixo propulsor poderá operar com segurança, evitando os pontos ressonantes;

A metodologia apresentada foi avaliada por estudos baseados em duas referências: uma linha de eixo que foi analisada pela técnica de diferenças finitas, através do código GBRC-3, ?, e dois casos de rotores em balanço que foram resolvidos no *software* Matlab, apresentados em VANCE *et al.* (2010). No final do trabalho, são feitos 2 estudos de caso, onde a metodologia proposta foi aplicada em duas linhas de eixo: um navio do tipo AHTS (*Anchor Handling Tug Supply*) e um navio militar em fase de concepção de projeto.

1.4 Organização da Dissertação

- O Capítulo 1 introduz os principais aspectos que originaram este trabalho, como os problemas mais comuns que ocorrem e fatos recentes relacionados, as demandas existentes que justificam o estudo nessa área e os propósitos dessa dissertação;
- O Capítulo 2 apresenta uma revisão da literatura disponível, consistindo dos principais estudos feitos até este momento a respeito de modelação de navios por elementos finitos para cálculo de vibrações em linhas de eixo;

- No Capítulo 3 são estabelecidas as bases para a dinâmica de rotores e são apresentados os conceitos, os sistemas de coordenadas envolvidos e a relação entre eles, os tipos de análises efetuadas, as equações e os métodos utilizados para solução de forma analítica;
- O Capítulo 4 mostra como são obtidas as matrizes de massa, rigidez e giroscópica através do método de elementos finitos, assim como é feita a resolução geral de forma numérica;
- No Capítulo 5 são descritos o procedimentos da metodologia, apresentando detalhadamente todos os passos para se obter um modelo, a geometria, os critérios e premissas utilizadas e as características e propriedades dos elementos;
- No Capítulo 6 são realizadas simulações em um programa comercial de elementos finitos aplicando a metodologia proposta para resolver as vibrações laterais de 2 linhas de eixo e depois são avaliados os resultados obtidos por diferentes técnicas para fins de comparação;
- O Capítulo 7 mostra dois estudos de caso: uma linha de eixo de um navio AHTS e outra de um navio militar, cujos resultados obtidos pelo Ansys foram comparados com os obtidos pelos seus respectivos *software* utilizados;
- O Capítulo 8 apresenta as conclusões do estudo, críticas e recomendações gerais para os trabalhos futuros nessa área;

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

JEFFCOTT (1919) foi o pioneiro na introdução do conceito de precessão devido ao desbalanceamento do eixo. Ele utilizou expressões analíticas para definir o equacionamento da forma elástica deformada do eixo em função das forças transversais atuantes no eixo, como as forças de inércia e de resistência elástica à deformação. Ele também mostrou que, em regime permanente e quando o eixo está girando com velocidade angular constante, a trajetória do centro da linha elástica do eixo é uma circunferência, pois o raio elíptico, que é a amplitude da resposta ao desbalanceamento, se mantém constante. Além disso, ele demonstrou que a força centrífuga atuante é menor quando se opera com uma velocidade angular acima das velocidades críticas, sendo mais favorável ao eixo do que trabalhar na condição contrária.

JASPER (1954) criou uma rotina, utilizando o método de diferenças finitas, para solucionar um conjunto de equações independentes do tempo em termos de deflexões e momentos que ocorrem nos 2 planos que acontecem as vibrações flexionais. Ele criou um código em FORTRAN IV que resolve o sistema de equações diferenciais governantes do movimento para obter as respostas do eixo através de uma gama especificada de frequências das forças de excitação e/ou momentos que atuam sobre ele ou obter as frequências críticas de precessão e formas modais de vibração livre.

HUANG e HUANG (1967) fez um estudo para determinar analiticamente a precessão angular e as velocidades críticas de rotores de todos os tipos apoiados por 2 mancais e com um disco em balanço na extremidade. A massa do rotor foi analisada de forma contínua e ele utilizou como parâmetros o espaçamento entre os mancais, a razão entre a massa do disco e a do eixo e a razão entre o raio de giração do disco e o comprimento do eixo. Ele considerou para cada caso o momento giroscópico, a inércia rotativa e a deformação por cisalhamento e, variando os parâmetros definidos, traçou vários gráficos de formas modais baseados

nas frequências naturais do sistema em vibrações transversais utilizando as teorias clássicas de viga de *Euler* e de *Timoshenko*. Em virtude dos diversos fatores pertinentes considerados no estudo, ele executou uma análise completa para eixos em balanço com dois mancais e esta metodologia desenvolvida pode fornecer aos engenheiros todas as informações analíticas que eles precisam.

RAO (1982) analisou a resposta dinâmica ao desbalanceamento de um rotor de *Jeffcott* flexível, com apenas um disco, suportado por dois mancais hidrodinâmicos. Os coeficientes de rigidez cruzada da mola foram considerados no estudo e o amortecimento foi desprezado. Mostrou-se que poderia haver duas velocidades críticas distintas do rotor, sendo uma delas uma precessão síncrona retrógrada ou que não haveria nenhuma velocidade crítica convencional do rotor. Dois estudos de caso foram apresentados, onde ele considerou 2 graus de liberdade no movimento plano transversal e utilizou matrizes de transferência para a análise. No primeiro, ele admitiu as componentes acopladas da matriz de rigidez como sendo nulas ($K_{zy}=K_{yz}=0$) e a excitação sendo a força centrífuga com componentes harmônicos no tempo. Ele afirmou que, dependendo dos valores dos coeficientes de rigidez cruzada dos mancais, são concluídas duas coisas: a primeira é que existe a chance de existirem duas velocidades críticas diferentes na faixa de rotação onde o mancal tem grande rigidez, quando os 2 coeficientes de rigidez acoplados forem positivos ou se um deles for negativo e, nestas circunstâncias, existe uma precessão retrógrada do rotor para as velocidades de rotação situadas entre as duas velocidades críticas. A segunda é que não existe uma velocidade crítica diferente, como é convencionalmente conhecido, quando um dos coeficientes de rigidez cruzada do mancal é negativo, pois sob estas circunstâncias, o rotor tem apenas precessão direta para todas as velocidades de rotação nesta região.

WARIKOO e HADDARA (1992) desenvolveram um método prático e simples para obter as frequências naturais de um eixo propulsor nas fases iniciais de projeto, quando ainda não se tem todos os dados necessários do sistema. Ele dividiu o problema em 3 partes: (1) análise das frequências naturais e modos das pás do hélice, isoladamente; (2) equação de vibração lateral do sistema eixo-rotor, que foi derivada no plano complexo, onde foram encontradas suas frequências naturais e (3) as frequências naturais do hélice e do eixo-rotor foram acopladas para gerar as frequências naturais do conjunto eixo-propulsor. Nesta última, foram admitidos os efeitos hidrodinâmicos, considerando a massa adicional e, na construção do seu modelo do propulsor, ele desprezou os efeitos de deformação por cisalhamento e forças centrífugas nas pás do hélice.

MUSZYNSKA (1996) se propôs a analisar o fenômeno da precessão para tentar explicar como era possível a coexistência simultânea de órbitas diretas e retrógradas ao longo da linha de eixo de um rotor vertical, desbalanceado, com a extremidade inferior livre e apoiado lateralmente por mancais anisotrópicos. Então ela realizou um estudo analítico e experimental e utilizou análise de sensibilidade para mostrar quais parâmetros do sistema são os principais responsáveis pelos efeitos de precessão. No modelo físico, ela utilizou sensores na parte central e na extremidade livre para medir os deslocamentos transversais e os parâmetros utilizados para a simulação numérica foram escolhidos bem próximos dos parâmetros modais identificados nos ensaios. Ela concluiu que as regiões de velocidade rotativa onde ocorre precessão retrógrada são relativamente estreitas e próximas às velocidades de ressonância, as quais são normalmente evitadas como velocidades operacionais. Sempre existe o perigo durante as operações de inicialização e parada de máquinas, contudo é possível melhorar consideravelmente as operações em condição transitória do rotor com um alinhamento e um bom balanceamento. Além disso, uma quantidade suficiente de amortecimento nos mancais pode efetivamente suprimir a precessão retrógrada.

YU *et al.* (1999) modelaram um eixo como um sólido tridimensional em elementos finitos para analisar suas órbitas transversais, onde foram considerados os modos de vibração flexionais, torcionais e axiais e adotaram a redução de procedimentos, que envolve pequenas operações matriciais em um sistema com um grande número de graus de liberdade. Nos casos especiais de um eixo uniforme esbelto ou não, o modelo mostrou consistência com as teorias de viga de *Euler-Bernoulli* e de *Timoshenko*. Entretanto, quando o eixo varia as suas seções transversais ao longo do comprimento, o modelo 3D se torna bem mais eficiente quanto à precisão nas deformações, pois seus resultados apresentaram uma excelente concordância com os medidos experimentalmente. O comportamento orbital foi analisado com a linha de eixo submetida às excitações harmônicas e foi mostrado que as precessões diretas e retrógradas podem coexistir ao longo do eixo se forem observadas em um sistema rotativo como referência. Mas quando as frequências forçantes atuam nas frequências de órbitas ressonantes, a trajetória se torna uma precessão puramente direta ou puramente retrógrada e este fenômeno peculiar é justificado como uma consequência da combinação de duas diferentes curvas de deflexão em planos de flexão ortogonais.

OGUAMANAM (2003) analisou o movimento de vibração livre de uma viga de *Euler-Bernoulli* com uma massa rígida e pontual na extremidade, com o seu centro de gravidade desalinhado com a viga, simulando um rotor desbalanceado. Foram admitidas pequenas deformações e que os movimentos de flexão e torção

são acoplados e, a partir de simulações numéricas feitas em NASTRAN, observou que a frequência natural do modo fundamental do sistema depende dos seguintes parâmetros: valor da massa, excentricidade do centro de massa, os momentos de inércia de massa, o comprimento da viga, a sua esbeltez e as rigidezes flexional e torcional. Então, utilizando um método analítico de energia, foram determinadas as equações governantes do sistema baseado no princípio de *Hamilton* considerando diferentes condições de contorno clássicas de uma viga. Os efeitos de cada um desses parâmetros foram examinados usando termos equivalentes adimensionais e seus resultados foram tabelados e esboçados para análise.

DIMENTBERG *et al.* (2006) consideraram um rotor de *Jeffcott* com um único disco e amortecimentos externo e interno, o qual está sujeito a uma excitação aleatória que resulta em vibrações transversais aleatórias, até mesmo nas velocidades de rotação abaixo do limite de instabilidade. Ele admitiu que as forças arbitrárias em duas direções perpendiculares se comportam como ruídos brancos não correlacionados, os quais podem ter diferentes intensidades em geral. Então, ele adotou alguns parâmetros físicos, definiu as perturbações externas utilizando conceitos estocásticos, como as funções de auto-correlação, correlação cruzada e densidade espectral de potência, e deduziu uma expressão analítica para o valor de pico da função de coerência das respostas nas direções transversais $Y(t)$ e $Z(t)$ como uma função da razão da velocidade de rotação para seu valor no limiar de instabilidade. Além disso, foram realizados testes de simulação por computador para o procedimento sugerido baseado em coerência a fim de comparar estes resultados numéricos com os da expressão analítica criada e verificar o método para a avaliação da margem de estabilidade em linha para eixos rotativos. Tais resultados foram esboçados graficamente em ambos os modos para diversas condições dos parâmetros onde se mostrou a eficiência da metodologia sugerida.

GRZĄDZIELA (2008) discute um método de modelagem da dinâmica do eixo do hélice na presença de efeitos de detonação subaquática virtualmente introduzidos. O modelo admite quatro graus de liberdade, se aproximando mais dos deslocamentos e rotações em um eixo real. As equações governantes foram implementadas no ambiente SIMULINK, do Matlab, e foram introduzidos no modelo dinâmico os seguintes agentes externos: torque do motor principal, força de empuxo axial, mudança nas posições dos mancais e variação da pressão hidrodinâmica gerada por uma explosão submarina. O modelo proposto é não linear e utiliza as equações de *Lagrange* para descrever os movimentos através da energia mecânica do sistema. Os espectros das simulações numéricas foram comparados com os dados medidos experimentalmente e os resultados ficaram bem próximos, com uma diferença

máxima inferior a 10%, fato que comprovou a boa aplicação do modelo proposto. A identificação do modelo confirmou sua sensibilidade às mudanças de parâmetros de movimento e perturbações ambientais, entretanto, o desalinhamento do eixo mostrou-se indiferente às excitações externas.

GAN-BO e YAO (2012) consideraram o eixo propulsor como um trocador essencial de torque do motor e do empuxo do hélice, mas que geralmente sofre uma grande vibração axial induzida pelas oscilações da força de empuxo devido a uma esteira não uniforme perto do hélice causada pela assimetria do casco e protuberâncias na popa. Por isso, GAN-BO decidiu projetar um controlador ativo da vibração longitudinal de um eixo propulsor marítimo através da modelagem de ordem reduzida com parâmetros concentrados. As formas modais longitudinais do eixo foram determinadas baseadas no modelo contínuo, unidimensional e com abordagem de onda elástica. Como os mancais hidrodinâmicos não possuem rigidez e nem contribuição de massa no modo axial, eles foram ignorados no modelo analítico. Em virtude da presença do hélice, o primeiro modo tem uma contribuição dominante na resposta do eixo, exigindo que este seja mais precisamente representado pelo modelo de ordem reduzida. Então, a partir dessa análise de sensibilidade, decidiu-se priorizar os 2 primeiros modos e adotar um modelo com dois graus de liberdade, onde os pontos de massa vão se localizar nos nós do terceiro modo. Em seguida, foram comparados os gráficos de amplitude da resposta entre o modelo de ordem reduzida e o sistema real contínuo e foi confirmada uma excelente concordância até a frequência de ressonância de segunda ordem.

ZHANG *et al.* (2014) fragmentaram um sistema de propulsão submarina em vários módulos e definiram as características dinâmicas de cada um deles. Então criaram uma rotina em Matlab para estimar a rigidez e o amortecimento do óleo lubrificante dos mancais hidrodinâmicos e utilizaram matrizes de transferência para analisar a vibração longitudinal da linha de eixos. A massa do hélice, juntamente com a água arrastada ao seu redor representa cerca de 60% da massa de todo o sistema propulsor e por isso o hélice foi modelado como uma massa concentrada. Eles concluíram que uma melhoria na rigidez do mancal de escora reduz a amplitude da resposta fora da faixa de ressonância até um valor limite e as propriedades de rigidez e amortecimento do filme de óleo variam de forma não-linear com a velocidade de rotação do eixo, o que permite o efeito excessivo da ampliação da força de empuxo no eixo propulsor.

ZOU *et al.* (2016) estabeleceram um modelo acoplado axial-transversal e, utilizando o princípio de *Hamilton* estendido discretizado pelo método de *Galerkin*,

analisaram a resposta dinâmica da linha de eixo em regime permanente e a estabilidade do sistema. Eles adotaram algumas premissas para justificar o uso do método de múltiplas escalas, onde se admite que a primeira frequência natural longitudinal é aproximadamente igual à soma das duas frequências naturais do primeiro modo transversal: a frequência de precessão direta e a de precessão retrógrada. Eles mostraram que quando a intensidade da força de excitação longitudinal atinge o valor de uma carga crítica, a qual pode ser calculada, ocorre um fenômeno de saturação, onde a amplitude da vibração longitudinal passa a se manter constante e a energia extra é transferida ao modo transversal e a sua taxa de distribuição entre os modos laterais de precessão direta e retrógrada se torna inversamente proporcional às suas respectivas variações de frequências.

ZHANG *et al.* (2016) construíram um modelo analítico para resolver o problema de vibração de um eixo propulsor marítimo quando este é perturbado pelo casco do navio, o qual é excitado pelas ondas do mar. Ele considerou os mancais sendo estruturas de conexão que transmitem as forças do casco ao eixo e analisou as influências da inércia do hélice, da rigidez dos mancais e suas respectivas posições longitudinais ao longo do eixo, das amplitudes das excitações externas e do comprimento do eixo. Também foi criado um modelo numérico em ANSYS para validar os resultados e concluíram que, quanto mais rígidos forem os mancais, maiores serão as frequências naturais e menores serão as amplitudes de deslocamento de resposta da linha de eixo. Foi concluído que, sob as excitações no casco, a amplitude do deslocamento do eixo na extremidade do motor é maior que na outra extremidade em virtude da inércia da massa do hélice.

LI *et al.* (2016) verificaram que a flutuação das forças de empuxo induzidas pela rotação do hélice em uma esteira não uniforme podem excitar a vibração da pressão no casco de um submarino, facilitando a sua identificação por um sonar devido à propagação sonora pela estrutura do casco. Baseado nisto, eles se propuseram a estudar as características dinâmicas e acústicas de um sistema submerso eixo-casco acopladamente, os quais foram modelados pelo método da matriz de transferência. O objetivo principal era estudar as respostas estruturais com o uso de um isolador para reduzir a vibração de todo o sistema e foi adotado um modelo de ordem reduzida para o hélice a fim de se analisar a influência da sua elasticidade. De acordo com os resultados das simulações numéricas e ensaios experimentais, concluiu-se que o isolador de vibração axial pode reduzir a transmissão de força efetivamente mas tem pouca influência sobre a radiação sonora do hélice e a potência de entrada para o sistema, sendo que a localização do isolador é um fator importante para diminuir a vibração do sistema acoplado e a po-

sigão ideal do mesmo se situa no eixo, entre o mancal de escora e o mancal adjacente.

HUANG *et al.* (2016) afirmaram que o estudo da vibração para as condições de carregamento da embarcação é extremamente necessário, pois o eixo propulsor se deplete severamente devido à deformação do casco quando comparado com o navio docado e em serviço. Com o objetivo de realizar uma análise numérica e experimental das vibrações transversais e longitudinais acopladas de um eixo propulsor, eles discretizaram um modelo numérico em elementos finitos e utilizaram um método de energia, através do princípio de *Hamilton*, para estudar as vibrações acopladas e comparou os resultados das simulações com os obtidos empiricamente. O estudo foi baseado num eixo real com 4 mancais e um disco em balanço e obteve-se as respostas dinâmicas em regime transiente e permanente para excitações harmônicas. Eles concluíram, através de análise harmônica, que as frequências naturais, tanto na direção transversal quanto na direção longitudinal, não sofrem alterações significativas com a variação da velocidade de rotação do eixo abaixo das condições ressonantes e as amplitudes máximas de vibração acoplada em ambos os modos crescem com o aumento da velocidade angular do eixo.

HUANG *et al.* (2017) utilizaram um modelo numérico e o conceito de massa concentrada, visando analisar a vibração longitudinal-torcional acoplada de um eixo propulsor marítimo. Na solução teórica, consideraram o acoplamento das equações diferenciais de movimento, sendo que o ângulo de torção induzia uma força longitudinal, assim como a deformação axial induzia um momento torsor. Testes experimentais foram conduzidos para uma faixa de velocidades entre 100 e 500 RPM, com e sem carregamento, para a validação do modelo e os resultados simulados e ensaiados tiveram uma boa concordância. Ele concluiu que a resposta final na direção sem excitação é ampliada devido ao efeito do acoplamento e que a amplitude de resposta cresce com o aumento da velocidade rotacional do eixo.

2.1 Conclusões da Revisão Bibliográfica

Após a leitura dos artigos pesquisados, chegou-se às seguintes conclusões:

- Por menor que seja, o eixo propulsor praticamente sempre terá um nível de desbalanceamento e este geralmente é o único responsável pelo movimento de precessão, em virtude da força centrífuga da massa desbalanceadora;
- As velocidades críticas não podem ser evitadas e, caso estejam dentro da faixa operativa do navio e este precise operar acima de alguma delas, é recomendado

que se passe por ela da forma mais rápida possível, aumentando a taxa de variação do torque para isso;

- O movimento de precessão pode ser direto ou retrógrado e as órbitas transversais, de um modo geral, são elípticas, podendo ser circulares ou se aproximarem de uma reta, dependendo dos coeficientes de rigidez vertical e horizontal dos mancais;
- A precessão direta gera maiores amplitudes de resposta mas, em contrapartida, a precessão retrógrada aumenta as chances de fadiga do material devido à constante inversão do sentido da tensão cisalhante;
- Para o caso de um eixo propulsor, que é um rotor em balanço com uma massa na extremidade, os modelos que utilizaram massa agrupada apresentaram uma boa aderência ao sistema real e a massa adicional do hélice deve ser sempre considerada na modelagem, haja vista que ela representa uma grande parcela da inércia total do sistema;
- A teoria da viga de *Timoshenko* é mais completa e realista, pois considera a inércia rotativa e a deformação por cisalhamento, porém a teoria de *Euler-Bernoulli*, embora admita hipóteses simplificadoras, pode ser mais eficiente dependendo das condições do problema e do que se deseja analisar;
- O modelo de amortecimento viscoso-linear se mostrou, de um modo geral, muito eficiente pela simplicidade e pela boa concordância com dados experimentais.

Capítulo 3

Fundamentos Teóricos

3.1 Conceitos básicos sobre dinâmica de rotores

3.1.1 Efeito giroscópico

Nos problemas de dinâmica de rotores, a combinação do movimento de rotação do eixo com os ângulos de inclinação de cada partícula de massa que compõe o disco gera o aparecimento do efeito giroscópico. Um rotor em movimento pode possuir momentos giroscópicos, especialmente quando o disco está localizado na extremidade de um eixo em balanço, pois o mesmo não vibrará no seu próprio plano, acoplando desta forma os movimentos de deflexão e inclinação. A razão deste fenômeno é que as forças centrífugas oriundas das partículas que compõem o disco não estão num mesmo plano. Por este motivo, em uma linha de eixo, os coeficientes de rigidez acoplados, que são os termos que ficam fora da diagonal principal na matriz de rigidez, não são nulos e os movimentos de translação nunca se desvinculam dos movimentos de rotação (GENTA, 2007).

Quando um rotor em balanço possui um momento de inércia substancial sobre o seu diâmetro, surge a aplicação de momentos consideráveis devido à mudança de orientação, conforme ilustrado na Fig. 3.1.

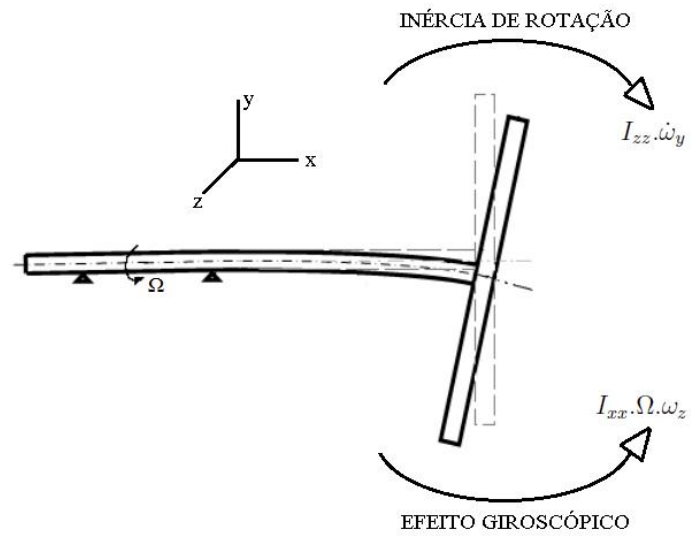


Figura 3.1: *Momentos aplicados sobre o disco de um rotor em balanço.*

Segundo a dinâmica clássica, a posição do disco de um rotor pode ser definida pelas coordenadas do seu centro de massa e por três ângulos, conhecidos como os ângulos de *Euler*, conforme a Fig. 3.2 abaixo.

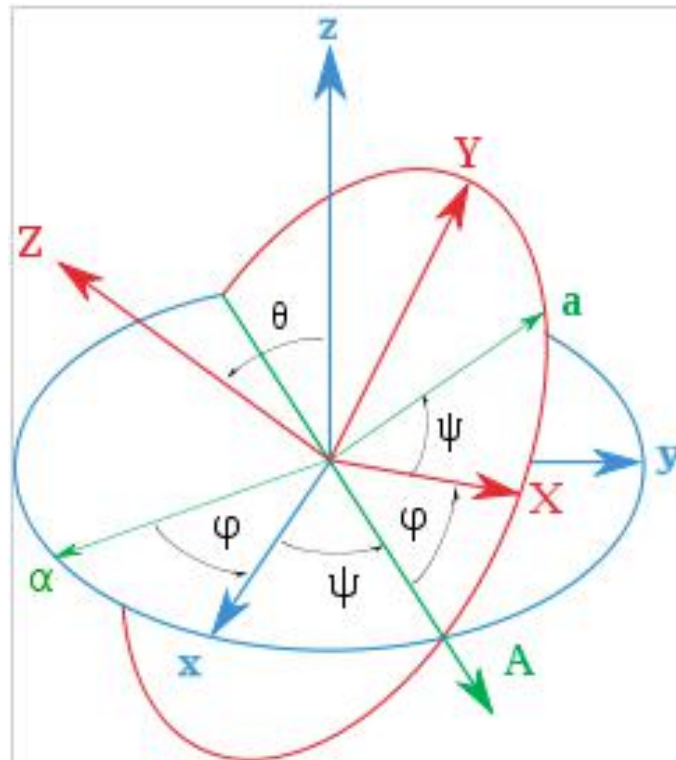


Figura 3.2: *Ângulos de Euler.*

3.1.2 Excitação síncrona

É quando a frequência de giro do rotor ocorre na mesma frequência do movimento de precessão. Alguns agentes externos podem causar a precessão síncrona mas geralmente é o desbalanceamento do rotor. Na Fig. 3.3(a), o elemento hachurado representa a massa desbalanceadora e a taxa de variação temporal de ϕ é a precessão. Como o ângulo β , formado entre o vetor posição do desbalanceamento U e o vetor posição da precessão V , permanece constante no tempo, então a velocidade de rotação do eixo ω_s será igual à velocidade de precessão $\dot{\phi}$.

3.1.3 Excitação assíncrona

É quando o movimento de precessão do eixo ocorre em uma frequência diferente de sua rotação. Ressalta-se que os problemas de rotodinâmica mais destrutivos envolvem este tipo de precessão. Na Fig. 3.3(b), a taxa de variação temporal do ângulo β é a velocidade de rotação do eixo relativa ao vetor precessão V , portanto, a velocidade de rotação do eixo ω_s será a soma das velocidades angulares $\dot{\beta}$ e $\dot{\phi}$.

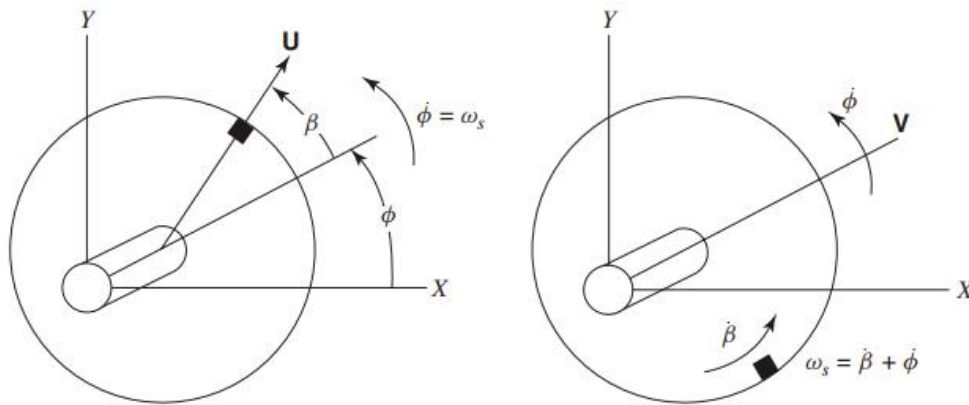


Figura 3.3: *Precessão síncrona(a) X Precessão assíncrona(b).*

3.1.4 Diagrama de Campbell

O Diagrama de Campbell (Fig. 3.4) é um gráfico muito utilizado em rotodinâmica que mostra como as frequências naturais de cada forma modal, nas precessões direta e retrógrada, vão variar em função da velocidade de rotação do rotor, neste caso o eixo propulsor. O eixo das abscissas representa a velocidade de rotação, geralmente em r.p.m., e o eixo das ordenadas representa as frequências naturais, geralmente em Hertz. Para identificar as duas frequências naturais para cada rotação, basta traçar uma reta vertical sobre a velocidade desejada, que esta interceptará as mesmas.

A principal função deste gráfico é identificar as velocidades críticas do rotor, as quais são obtidas pela interseção das curvas de frequências naturais com retas do tipo $y = h.x$, sendo que y representa as frequências de perturbação externas (ω), x representa a velocidade de giro do eixo (Ω). Se o coeficiente angular h for um número inteiro, a excitação será síncrona e, caso contrário, a excitação será assíncrona. Portanto, o significado físico do cruzamento dessas curvas é a coincidência das frequências de excitação externas com as frequências naturais do sistema, ou seja, são pontos de ressonância e por isso são chamados de críticos, já que devem ser evitados.

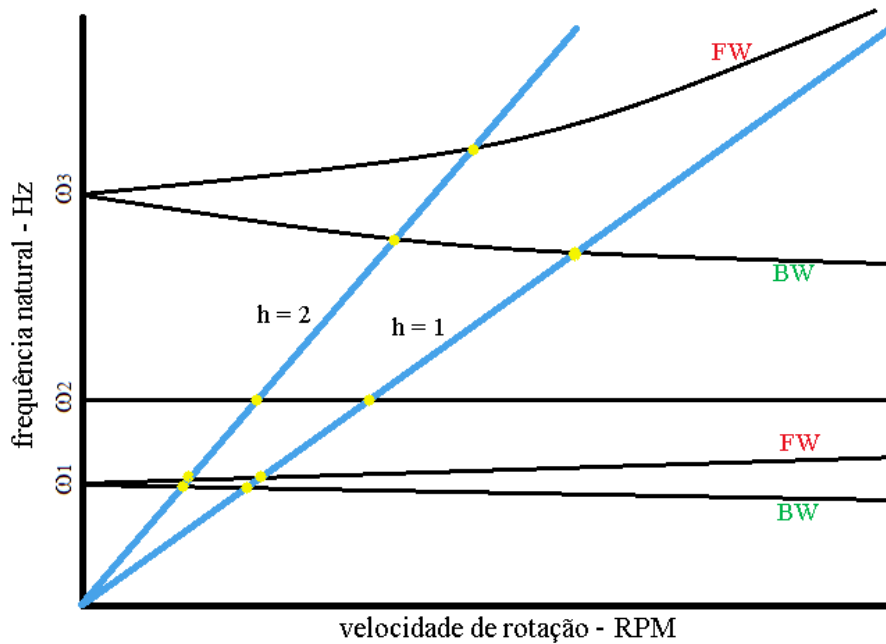


Figura 3.4: *Diagrama de Campbell.*

3.1.5 Velocidades críticas

Existem várias maneiras de se definir este conceito e um equívoco muito comum em rotodinâmica é achar que velocidade crítica é uma instabilidade, o que até chega a ser verdade, em particular, quando não existe amortecimento, ou seja, uma situação completamente teórica. Se a frequência de algum componente harmônico de uma excitação periódica for próxima de alguma frequência natural de qualquer modo de vibração do rotor, pode ocorrer uma situação de ressonância e, se essa ressonância existir em uma velocidade finita, essa velocidade é chamada de crítica. Ou seja, são as velocidades nas quais a resposta ao desbalanceamento ou qualquer outro tipo de excitação síncrona é máxima.

As velocidades críticas são os pontos, na cor amarelo, no gráfico da figura 3.4.

3.1.6 Gráfico de órbitas

O gráfico de órbitas, conforme o exemplo na Fig. 3.5, é construído para cada velocidade de rotação e fornece os deslocamentos transversais dos pontos do centro da linha elástica do eixo em todo o seu comprimento. Essas trajetórias elípticas estão no plano YZ e os deslocamentos verticais (eixo Y) e horizontais (eixo Z) são inversamente proporcionais aos seus respectivos coeficientes de rigidez principais dos mancais nessas direções.

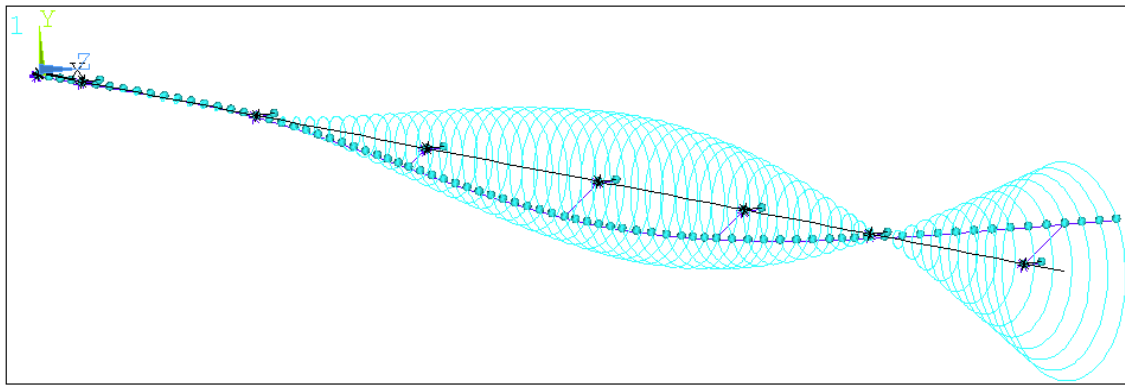


Figura 3.5: *Exemplo do gráfico de órbitas de uma linha de eixo.*

Este gráfico é extremamente importante em rotodinâmica, pois os raios das órbitas em cada seção permitem analisar se a trajetória que o eixo fará dentro dos mancais de deslizamento não vai superar as folga entre eles. Caso contrário, ambos serão rapidamente danificados em decorrência de um roçamento severo.

3.1.7 Diagrama de Bode

Tanto o sinal de entrada em um sistema (excitação), quanto o sinal de saída (resposta) podem ser representados nos domínios do tempo e frequência e a curva de Bode é a ferramenta mais utilizada para o estudo de uma resposta na frequência.

Quando se converte uma função real no domínio do tempo para o domínio da frequência através da FFT (*Fast Fourier Transform*), é obtida uma função complexa $[F(\omega) = a + b.i]$, cuja representação gráfica, em números reais, é decomposta em 2 componentes: a amplitude da função para cada frequência $[A(\omega) = \sqrt{a^2 + b^2}]$ e a fase da função para cada frequência $[\Phi(\omega) = \arctan(b/a)]$.

O gráfico da amplitude (Fig. 3.6-a) mostra a intensidade com que um determinado grau de liberdade do sistema responde ao ser perturbado naquela frequência, enquanto que o gráfico da fase (Fig. 3.6-b) representa o atraso temporal entre os instantes de entrada e saída do sistema.

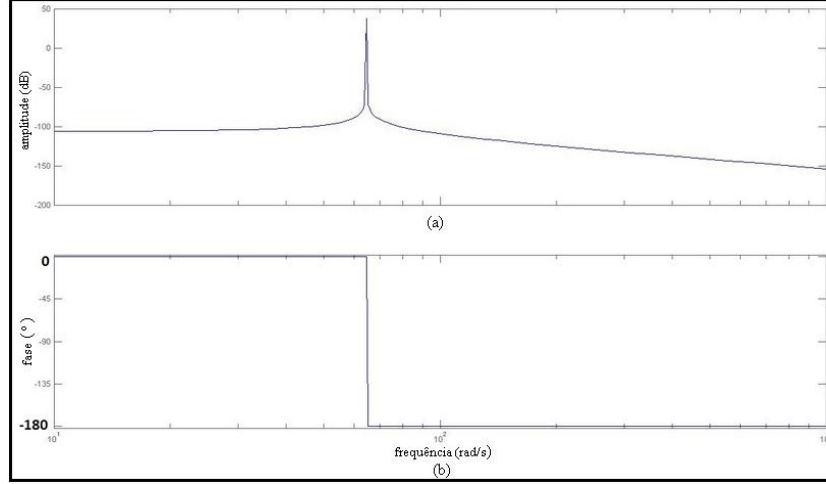


Figura 3.6: *Diagrama de Bode.*

3.2 Desenvolvimento da Solução

Neste capítulo será mostrado o desenvolvimento analítico para resolver um conjunto de equações diferenciais parciais relativo ao movimento de um eixo sob o efeito de precessão.

Em virtude do efeito giroscópico atuante, as vibrações de flexão, que originam os deslocamentos transversais ao eixo longitudinal, se tornam acopladas, causando uma dependência mútua dos movimentos nas direções Y e Z .

Neste tipo de abordagem, é importante deixar claro que o propulsor, modelado como um cilindro bem esbelto, será incorporado à linha de eixo para a aplicação do modelagem matemática.

O eixo propulsor pode ser bem representado por uma viga de *Timoshenko*, onde cada elemento do eixo tem um comprimento dx e uma área S , de acordo com a Fig. 3.7.

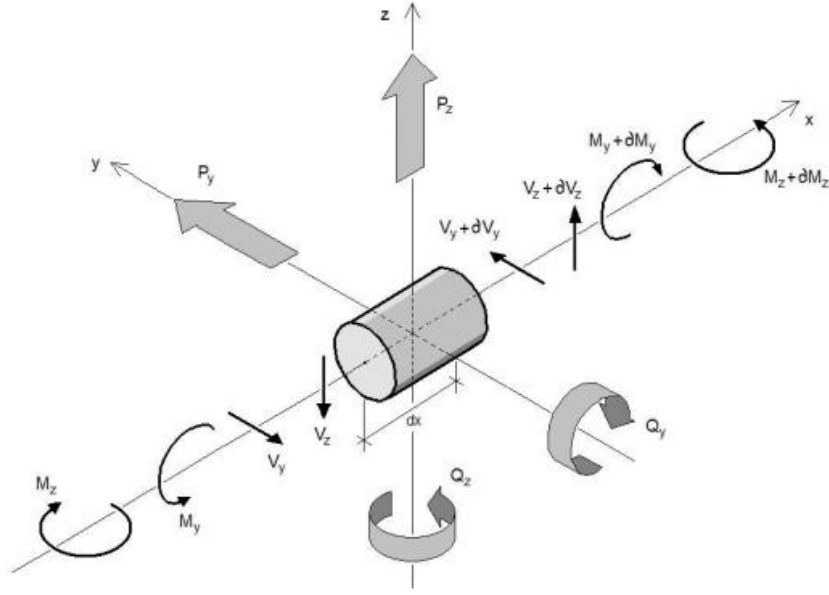


Figura 3.7: *Elemento de viga de Timoshenko.*

3.2.1 Equações diferenciais do eixo

Quando a linha de eixo se deflete, surgem forças e momentos nas direções transversais Y e Z associados aos seus deslocamentos de translação e rotação. Para cada elemento infinitesimal do eixo, podem-se escrever as seguintes equações diferenciais:

$$\frac{\partial V_y(x, t)}{\partial x} = -m(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - k_l(x) \cdot y(x, t) - c(x) \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} + P_y(x, t) \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial M_z(x, t)}{\partial x} = -V_y(x, t) - \omega \cdot \tau(x) \frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial t} - \tau_d(x) \frac{\partial^2 \beta(x, t)}{\partial t^2} - k_\beta(x) \cdot \beta(x, t) + Q_z(x, t) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \beta(x, t)}{\partial x} = -\frac{M_z(x, t)}{EI(x)} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = \beta(x, t) - \frac{V_y(x, t)}{k'GA(x)} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial V_z(x, t)}{\partial x} = -m(x) \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} - k_l(x) \cdot z(x, t) - c(x) \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} + P_z(x, t) \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial M_y(x, t)}{\partial x} = -V_z(x, t) - \omega \cdot \tau(x) \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial t} - \tau_d(x) \frac{\partial^2 \alpha(x, t)}{\partial t^2} - k_\alpha(x) \cdot \alpha(x, t) + Q_y(x, t) \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} = -\frac{M_y(x, t)}{EI(x)} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial z(x, t)}{\partial x} = \alpha(x, t) - \frac{V_z(x, t)}{k'GA(x)} \quad (3.8)$$

Onde:

- x - distância na direção longitudinal medida a partir de $x = 0$ (m)
- t - variável tempo (s)
- $V_y(x, t)$ - força cortante na direção Y (N)
- $V_z(x, t)$ - força cortante na direção Z (N)
- $m(x)$ - massa distribuída da viga (kg/m)
- $k_l(x)$ - rigidez axial da viga distribuída na direção X (N/m²)
- $y(x, t)$ - deflexão na direção Y (m)
- $z(x, t)$ - deflexão na direção Z (m)
- $c(x)$ - amortecimento da viga distribuído na direção X (Ns/m)
- $P_y(x, t)$ - força externa vertical distribuída na direção Y (N/m)
- $P_z(x, t)$ - força externa horizontal distribuída na direção Z (N/m)
- $M_y(x, t)$ - momento fletor externo distribuído na direção Y (N)
- $M_z(x, t)$ - momento fletor externo distribuído na direção Z (N)
- ω - velocidade de rotação do eixo na direção X (rad/s)
- $\tau(x)$ - momento polar de inércia de massa da viga distribuído em X (kg.m)
- $\tau_d(x)$ - momento diametral de inércia de massa da viga distribuído em X (kg.m)
- $\alpha(x, t)$ - ângulo de deflexão da viga no plano XZ (rad)
- $\beta(x, t)$ - ângulo de deflexão da viga no plano XY (rad)
- $k_\alpha(x)$ - rigidez flexional vertical da viga distribuída no plano XZ (N/rad)

- $k_\beta(x)$ - rigidez flexional horizontal da viga distribuída no plano XY (N/rad)
- $Q_y(x, t)$ - momento externo atuante sobre a viga distribuído em Y (N)
- $Q_z(x, t)$ - momento externo atuante sobre a viga distribuído em Z (N)
- E - módulo de elasticidade longitudinal da viga (N/m²)
- $I(x)$ - momento de inércia transversal de área da seção na posição x (m⁴)
- k' - fator de área efetiva de cisalhamento
- G - módulo de elasticidade transversal da viga (N/m²)
- $A(x)$ - área da seção transversal da viga na posição x (m²)

As 4 primeiras equações são referentes ao plano XY , assim como as 4 últimas se referem, analogamente, ao plano XZ .

A Eq. 3.1 mostra o equilíbrio dinâmico na direção Y entre as forças internas (cortante, inércia, rigidez e amortecimento) e as forças externas, representada pela força resultante P_y . As forças estão distribuídas linearmente no eixo X e a unidade das parcelas é N/m no sistema internacional.

A Eq. 3.2 reproduz o equilíbrio dinâmico da densidade de forças ao longo da viga, sendo o terceiro termo da esquerda para a direita o momento giroscópico e o quarto termo a inércia de rotação. A unidade das parcelas é N .

A Eq. 3.3 representa a expressão do momento fletor na seção transversal da viga elástica, na direção Z . Ela é originada de uma equação diferencial de segunda ordem no espaço, onde $E.I$ é o módulo de rigidez à flexão e o ângulo β é aproximado pela tangente da inclinação, considerando pequenas deflexões.

Na Eq. 3.4, o ângulo α também é aproximado à sua tangente, dada pela derivada espacial $\frac{\partial y}{\partial x}$ e o terceiro termo é a deformação por cisalhamento, que é uma correção do ângulo de inclinação à flexão, desprezado no modelo de *Euler-Bernouli*.

3.2.2 Separação de Variáveis

Considerando-se que as forças e momentos externos aplicados a viga sejam harmônicos no tempo, é possível fazer a separação de variáveis no tempo e espaço.

No eixo Y :

$$\begin{cases} P_y(x, t) = f(t)P_y(x) \\ Q_y(x, t) = f(t)Q_y(x) \end{cases} \quad (3.9)$$

No eixo Z :

$$\begin{cases} P_z(x, t) = f(t)P_z(x) \\ Q_z(x, t) = f(t)Q_z(x) \end{cases} \quad (3.10)$$

Tal que a função harmônica é dada por:

$$f(t) = (e)^{j\omega.t} \quad (3.11)$$

Onde ω é a frequência natural de precessão, cuja relação com a frequência de rotação do eixo Ω é dada pela expressão na Eq. 3.12.

$$\Omega = h.\omega \quad (3.12)$$

Como as forças de excitação são harmônicas no tempo, então os efeitos na viga consequentemente também são, conforme as equações abaixo:

$$V_y(x, t) = f(t).V_y(x) \quad (3.13)$$

$$V_z(x, t) = f(t).V_z(x) \quad (3.14)$$

$$y(x, t) = f(t).y(x) \quad (3.15)$$

$$z(x, t) = f(t).z(x) \quad (3.16)$$

$$M_y(x, t) = f(t).M_y(x) \quad (3.17)$$

$$M_z(x, t) = f(t).M_z(x) \quad (3.18)$$

$$\alpha(x, t) = f(t) \cdot \alpha(x) \quad (3.19)$$

$$\beta(x, t) = f(t) \cdot \beta(x) \quad (3.20)$$

Substituindo-se as equações de 3.11 a 3.20 nas equações de 3.1 a 3.8, realizando-se as devidas diferenciações e dividindo tudo pelo termo $(e)^{i\omega \cdot t}$, a variável tempo é eliminada e se obtém o seguinte sistema de equações diferenciais no domínio do espaço:

$$\frac{dV_y(x)}{dx} = m(x)\Omega^2 y(x) - k_l(x)y(x) - j\Omega \cdot c(x)y(x) + P_y(x) \quad (3.21)$$

$$\frac{dM_z(x)}{dx} = -V_y(x) - jh\Omega^2 \tau(x)\alpha(x) + \tau_d(x)\Omega^2 \beta(x) - k_\beta(x)\beta(x) + Q_z(x) \quad (3.22)$$

$$\frac{d\beta(x)}{dx} = -\frac{M_z(x)}{EI(x)} \quad (3.23)$$

$$\frac{dy(x)}{dx} = \beta(x) - \frac{V_y(x)}{k'GA(x)} \quad (3.24)$$

$$\frac{dV_z(x)}{dx} = m(x)\Omega^2 z(x) - k_l(x)z(x) - j\Omega \cdot c(x)z(x) + P_z(x) \quad (3.25)$$

$$\frac{dM_y(x)}{dx} = -V_z(x) - jh\Omega^2 \tau(x)\beta(x) + \tau_d(x)\Omega^2 \alpha(x) - k_\alpha(x)\alpha(x) + Q_y(x) \quad (3.26)$$

$$\frac{d\alpha(x, t)}{dx} = -\frac{M_y(x)}{EI(x)} \quad (3.27)$$

$$\frac{dz(x)}{dx} = \alpha(x) - \frac{V_z(x)}{k'GA(x)} \quad (3.28)$$

3.2.3 Solução do problema

Após eliminar a variável tempo e visando a determinação dos deslocamentos laterais $y(x)$ e $z(x)$, é possível reduzir o sistema a somente 4 equações eliminando-se as variáveis $V_y(x)$ da Eq. 3.22 e $V_z(x)$ da Eq. 3.26. Realizando-se as simplificações algébricas, são obtidas as seguintes expressões para os deslocamentos angulares $\alpha(x)$ e $\beta(x)$:

$$\alpha(x) = B.(\frac{dM_y(x)}{dx} - k'GA(x). \frac{dz(x)}{dx} - Q_y(x)) + C.(-\frac{dM_z(x)}{dx} + k'GA(x). \frac{dz(x)}{dx} + Q_z(x)) \quad (3.29)$$

$$\beta(x) = C.(\frac{dM_y(x)}{dx} - k'GA(x). \frac{dz(x)}{dx} - Q_y(x)) - E.(-\frac{dM_z(x)}{dx} + k'GA(x). \frac{dz(x)}{dx} + Q_z(x)) \quad (3.30)$$

Onde os termos B, C e E são dados pelas seguintes expressões:

$$B = \frac{j h \Omega^2 \tau(x)}{(\tau_d(x) \Omega^2 - k'GA(x) - k_\beta(x))(\tau_d(x) \Omega^2 - k'GA(x) - k_\beta(x))(\tau_d(x) \Omega^2 - k'GA(x) - k_\alpha(x))(h \Omega^2 \tau(x))} \quad (3.31)$$

$$C = \frac{\tau_d(x) \Omega^2 - k'GA(x) - k_\alpha(x)}{(\tau_d(x) \Omega^2 - k'GA(x) - k_\beta(x))(\tau_d(x) \Omega^2 - k'GA(x) - k_\beta(x))(\tau_d(x) \Omega^2 - k'GA(x) - k_\alpha(x))(h \Omega^2 \tau(x))} \quad (3.32)$$

$$E = \frac{\tau_d(x) \Omega^2 - k'GA(x) - k_\alpha(x)}{(\tau_d(x) \Omega^2 - k'GA(x) - k_\beta(x))(\tau_d(x) \Omega^2 - k'GA(x) - k_\beta(x))(\tau_d(x) \Omega^2 - k'GA(x) - k_\alpha(x))(h \Omega^2 \tau(x))} \quad (3.33)$$

A partir da Eq. 3.24, pode-se isolar o termo $V_y(x)$.

$$V_y(x) = -k'GA(x) \left[\frac{dy(x)}{dx} - \beta(x) \right] \quad (3.34)$$

Substituindo-se a expressão de $\beta(x)$ na Eq. 3.34, se tem:

$$V_y(x) = -k'GA(x)\left[\frac{dy(x)}{dx} + E.\left(k'GA.\frac{dy(x)}{dx} - \frac{dM_z(x)}{dx} + Q_z(x)\right) - C.\left(\frac{dM_z(x)}{dx} - k'GA(x).\frac{dz(x)}{dx} - Q_y(x)\right)\right] \quad (3.35)$$

E de maneira análoga, a partir da Eq. 3.28, se chega ao termo $V_z(x)$.

$$V_z(x) = k'GA(x)\left[-\frac{dz(x)}{dx} + \alpha(x)\right] \quad (3.36)$$

E inserindo a expressão de $\alpha(x)$ na Eq. 3.36, chega-se a:

$$V_z(x) = k'GA(x)\left[-\frac{dz(x)}{dx} + B.\left(\frac{dM_y(x)}{dx} - k'GA(x).\frac{dz(x)}{dx} - Q_y(x)\right) + C.\left(\frac{dM_z(x)}{dx} - k'GA(x).\frac{dy(x)}{dx} + Q_z(x)\right)\right] \quad (3.37)$$

De acordo com a Fig. 3.8, a viga (eixo) é dividida em N elementos de comprimentos variáveis de forma que o centro de cada elemento fique definido pela coordenada x_i e as fronteiras de cada elemento pelas coordenadas $x_{i-1/2}$ e $x_{i+1/2}$, para $i = 1, 2, \dots, N$. Para os extremos do eixo tem-se $x_{1/2} = 0$ e $x_{N+1/2} = L$, onde L é o comprimento do eixo.

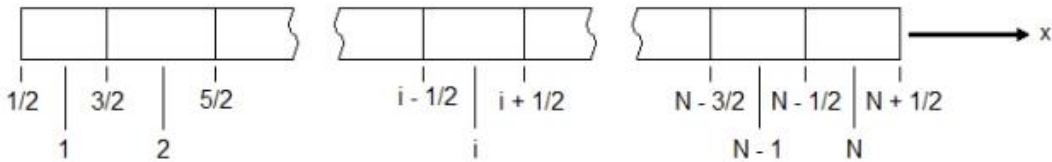


Figura 3.8: *Discretização do eixo.*

Agora, a Eq. 3.21 pode ser integrada da posição $x_{i-1/2}$ até $x_{i+1/2}$, fornecendo para cada seção do eixo as seguintes diferenças:

$$V_{y_{i+1/2}} - V_{y_{i-1/2}} = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} [m(x)\omega^2 - k_{ly} - j\omega \cdot c_y(x)]y(x)dx + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} P_y(x)dx \quad (3.38)$$

E esta equação pode ser aproximada por:

$$V_{y_{i+1/2}} - V_{y_{i-1/2}} = [(m\Delta x)_i\omega^2 - (k_y)_i - j\omega(c_y\Delta x)_i]y_i + P_{y_i} \quad (3.39)$$

Onde as integrações podem ser aproximadas pelos seguintes termos:

- $\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} m(x)dx = (m\Delta x)_i$ - massa da seção i
- $\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} k_{ly} \cdot dx = (k_y)_i = (k_{ly}\Delta x)$ - constante de rigidez da seção i na direção y
- $\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} c_y(x)dx = (c_y\Delta x)_i$ - constante de amortecimento da seção i em y
- $\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} P_y(x) \cdot dx = P_{y_i} = (P_y\Delta x)_i$ - força externa sobre a seção i na direção y

Da Equação 3.35, $V_{y_{i+1/2}}$ pode ser aproximada, para $i = 1, 2, \dots, N$, por:

$$V_{y_{i+1/2}} = -\frac{1}{\left(\frac{\Delta x}{kAG}\right)_{i,i+1}} \cdot [y_{i+1} - y_i + E_{i,i+1} \cdot (kAG_{i,i+1}(y_{i+1} - y_i) - (M_{z_{i+1}} - M_{z_i}) + Q_{z_{i,i+1}}) - C_{i,i+1} \cdot ((M_{z_{i+1}} - M_{z_i}) - kAG_{i,i+1}(z_{i+1} - z_i) - Q_{y_{i,i+1}})] \quad (3.40)$$

Onde:

- $\left(\frac{\Delta x}{kAG}\right)_{i,i+1} = \int_{x_{i+1}}^{x_i} \frac{1}{k'GA(x)} dx$
- $Q_{z_{i,i+1}} = \int_{x_{i+1}}^{x_i} Q_z(x) dx$
- $Q_{y_{i,i+1}} = \int_{x_{i+1}}^{x_i} Q_y(x) dx$

3.2.4 Condições de contorno

Para se aplicar as condições de contorno, deve-se considerar as restrições nas extremidades da viga (eixo), de forma que os valores de $V_{y_{1/2}}$, $V_{z_{1/2}}$, $\alpha_{1/2}$, $\beta_{1/2}$, $V_{y_{N+1/2}}$, $V_{z_{N+1/2}}$, $\alpha_{N+1/2}$ e $\beta_{N+1/2}$ incorporem as condições impostas.

Para as extremidades livres, os valores impostos para a força cortante são:

$$V_{y_{1/2}} = V_{z_{1/2}} = 0 \text{ para } V_y(0) = V_z(0) = 0$$

$$V_{y_{N+1/2}} = V_{z_{N+1/2}} = 0 \text{ para } V_y(L) = V_z(L) = 0$$

Sabe-se que, para uma extremidade livre, tanto a força cortante como o momento fletor são nulos e, portanto, pode-se assumir para M os valores:

$$M_{y_1} = M_{z_1} = 0$$

$$M_{y_L} = M_{z_L} = 0$$

Em contrapartida, para as extremidades que são fixas, as condições se refletem em α e β da seguinte forma:

$$\alpha_{1/2} = \beta_{1/2} = 0 \text{ para } \alpha(0) = \beta(0) = 0$$

3.3 A dinâmica dos rotores

A interpretação dos fenômenos de rotação requer a introdução de um sistema de coordenadas rotativas em relação ao sistema de coordenadas fixo do ambiente. A Fig. 3.9 ilustra o sistema de coordenadas adotado para a modelagem do sistema rotativo. O sistema de referência $\bar{X} \bar{Y} \bar{Z}$ se refere ao plano fixo e o sistema de referência $x y z$ ao plano rotativo.

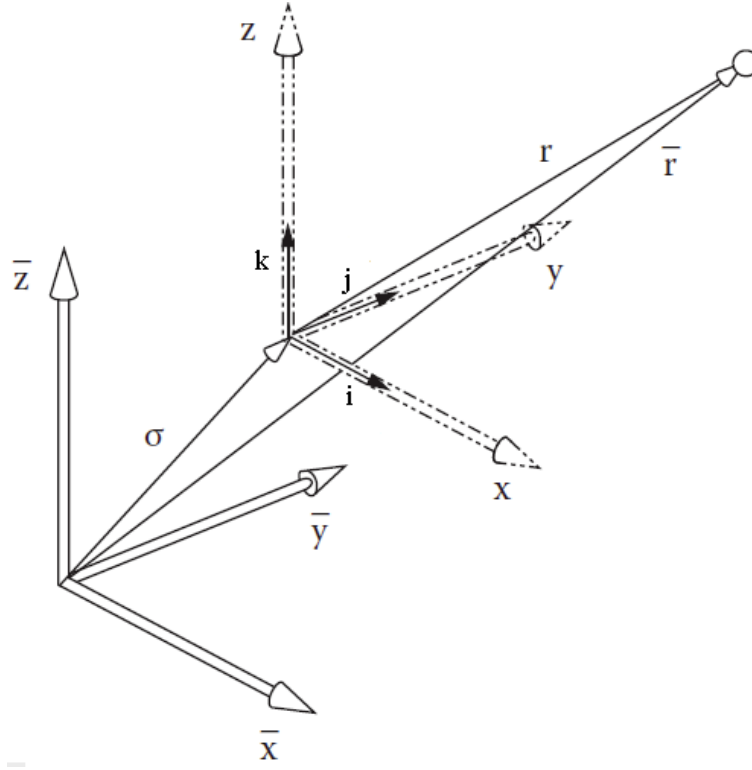


Figura 3.9: *Relações do sistema de coordenadas.*

A localização de um ponto no sistema fixo definido pelos eixos coordenados x, y, z são especificados pelo vetor na Eq. 3.41:

$$\vec{r} = \vec{\sigma} + \vec{r} \quad (3.41)$$

Onde r é o vetor posição do ponto em relação ao sistema de coordenadas se movendo, cujos eixos coordenados são definidos pelos vetores unitários \vec{i}, \vec{j} e \vec{k} . A origem do sistema de coordenadas móveis é definida pelo vetor $\vec{\sigma}$. O vetor posição do ponto no sistema fixo é definido em função dos vetores de coordenadas unitárias do sistema rotativo como:

$$\vec{r} = \vec{\sigma} + r_1 \vec{i} + r_2 \vec{j} + r_3 \vec{k} \quad (3.42)$$

Um linha de eixo propulsor é um caso particular de um rotor horizontal assimétrico, com uma massa concentrada em balanço (Fig. 3.10) e mancais que podem ser simétricos ou não, mas geralmente em casos reais, eles são assimétricos por possuírem uma rigidez vertical K_{yy} maior que a horizontal K_{zz} .

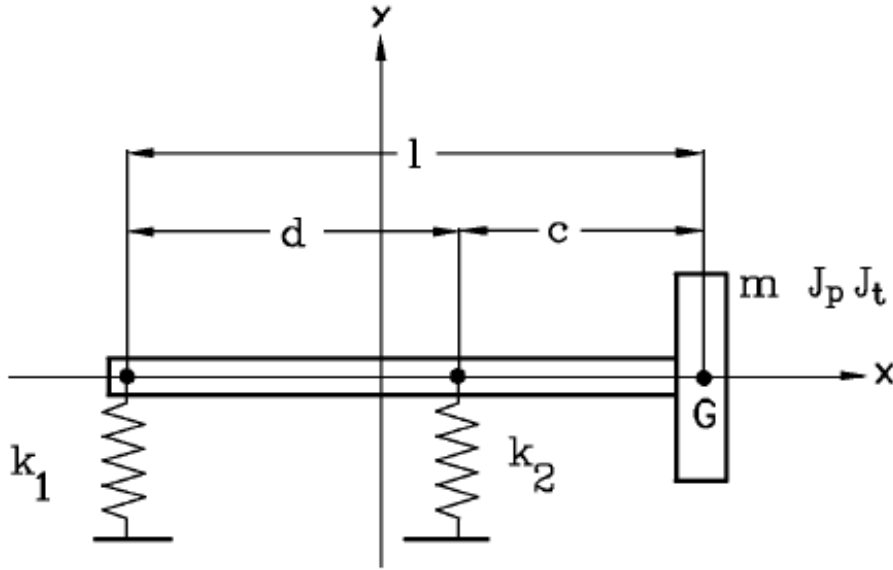


Figura 3.10: *Exemplo de um rotor em balanço com 2 mancais, GENTA (2007).*

As expressões de energia cinética caracterizam os movimentos do eixo, do disco e das massas desbalanceadoras, enquanto que as expressões de energia potencial caracterizam apenas o eixo rotativo, por causa de suas deformações elásticas. Já os mancais, que representam a parte estacionária do rotor, exercem forças diretamente sobre o eixo e contribuem com rigidez e amortecimento externos nas equações que governam as vibrações laterais do eixo.

Considerando a velocidade de rotação Ω constante e a linha de centro do eixo rotativo coincidente com a direção X , os deslocamentos laterais ocorrerão nas direções Y e Z . Os ângulos de inclinação da linha de eixo nas direções X , Y e Z são representados no sistema inercial por ϕ , Ψ e θ , respectivamente, e as suas derivadas temporais originam as 3 velocidades angulares ω_X , ω_Y e ω_Z . Dessa forma, a velocidade angular em qualquer ponto da linha de eixo, que é dada pela soma vetorial das suas componentes, pode ser escrita como:

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\vec{i} + \dot{\Psi}\vec{j} + \dot{\theta}\vec{k} \quad (3.43)$$

Sendo que a rotação do disco no eixo X é igual a do eixo, pois o hélice fica engastado ao eixo.

As componentes da velocidade angular instantânea do disco em relação ao referencial não inercial xyz podem ser representadas na forma matricial por:

$$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\Psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\Psi} \sin \theta \\ \dot{\Psi} \cos \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Adotando-se q_1 e q_2 como coordenadas generalizadas independentes e fazendo-se a separação de variáveis no espaço e tempo, as deflexões nos eixos Y e Z serão:

$$\begin{aligned} v(x, t) &= f(x)q_1(t) = f(x)q_1 \\ w(x, t) &= f(x)q_2(t) = f(x)q_2 \end{aligned} \quad (3.45)$$

Onde $f(x)$ é uma função de forma para as deflexões laterais, obtida a partir das condições de contorno do problema.

Admitindo-se pequenos valores para Ψ e θ , posto que as deformações angulares em torno do eixo Y e Z são desprezíveis, chega-se às seguintes simplificações:

$$\cos \Psi = \cos \theta = 1 \quad (3.46)$$

$$\sin \Psi = \Psi \quad (3.47)$$

$$\sin \theta = \theta \quad (3.48)$$

E então pode-se aproximar essas pequenas rotações por:

$$\theta(x, t) = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} q_2 = g(x)q_2 \quad (3.49)$$

$$\Psi(x, t) = -\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial f(x)}{\partial x} q_1 = -g(x)q_1 \quad (3.50)$$

3.3.1 Energia cinética do disco

O modelo proposto adota em sua extremidade um disco relativamente rígido, tendo deformações muito menores que as do eixo. Portanto, a sua energia potencial elástica será desprezada, considerando-se nesta modelagem somente a parcela correspondente à energia cinética do mesmo. É preciso estimar a massa e os momentos de inércia do disco, os quais dependem exclusivamente da geometria e do tipo do

material e podem ser calculados da seguinte forma:

$$m_D = \pi(R^2 - r^2)t\rho \quad (3.51)$$

$$I_y = I_z = \frac{m_D}{12}(3R^2 + 3r^2 + t^2) \quad (3.52)$$

$$I_x = \frac{m_D}{2}(R^2 + r^2) \quad (3.53)$$

Tal que:

- R é o raio externo
- r é o raio interno
- t é a espessura do disco
- ρ é a massa específica
- $I_y = \int_V z^2 dm$ e $I_z = \int_V y^2 dm$ são os momentos diametrais de inércia de massa
- $I_x = \int_V (y^2 + z^2) dm$ é o momento polar de inércia de massa

No caso particular de um disco, devido à sua simetria, tem-se: $I_y = I_z = I_D$ e $I_x = 2I_D$. Além disso, cabe esclarecer que, embora o formato dos hélices seja bem mais complexo que o de um disco, já existem alguns programas que calculam essas propriedades do propulsor com uma boa precisão, bastando apenas se conhecer a sua geometria.

Segundo MEIROVITCH (1986), a energia cinética do disco, originada pelas equações de corpo rígido, pode ser expressa por:

$$T_D = \frac{1}{2}m_D(\dot{v}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2}I_y(\dot{\theta}^2 + \dot{\Psi}^2) + \frac{1}{2}I_x(\Omega^2 + 2\Omega\dot{\Psi}\theta) \quad (3.54)$$

Onde os deslocamentos transversais v e w geram as velocidades de translação, os deslocamentos angulares Ψ e θ geram as velocidades de rotação e o último termo representa o efeito giroscópico.

Substituindo-se as equações em 3.45 na Equação 3.54, a energia cinética do disco fica sob a seguinte forma:

$$T_D = \frac{1}{2}[m_D f^2(l_1) + I_y f^2(l_1)](\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - I_x \Omega \cdot g^2(l_1) \dot{q}_1 q_2 + \frac{1}{2}I_x \Omega^2 \quad (3.55)$$

Onde $x = l_1$ é a posição longitudinal do disco em relação à origem.

3.3.2 Energia potencial do eixo

As rotações em cada elemento do eixo estão relacionadas com as suas deformações em virtude dos movimentos de flexão, conforme as equações abaixo:

$$\Psi = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \quad (3.56)$$

$$\theta = -\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad (3.57)$$

Quando o eixo sofre uma flexão, ele armazena energia potencial elástica com as deformações em cada ponto, como se fossem pequenas molas. Logo, a energia potencial devido à flexão pode ser definida como:

$$U_E = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon \sigma dV \quad (3.58)$$

Sendo que:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.59)$$

$$\varepsilon = -y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.60)$$

Substituindo-se a Equação 3.59 na Equação 3.58, a energia potencial fica:

$$U_E = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^2 E dV \quad (3.61)$$

Inserindo a expressão de ε na Eq. 3.61, a energia potencial do eixo pode ser representada no sistema de coordenadas rotativo, de acordo com LALANNE e FER-RARIS (1998), da seguinte forma:

$$U_E = \frac{E}{2} \int_0^L [I_{Tz} (\frac{d^2 \bar{v}}{dx^2})^2 + I_{Ty} (\frac{d^2 \bar{w}}{dx^2})^2] dx + \frac{F_o}{2} \int_0^L [(\frac{d\bar{v}}{dx})^2 + (\frac{d\bar{w}}{dx})^2] dx \quad (3.62)$$

Onde:

- E é o módulo de elasticidade longitudinal
- L é o comprimento do eixo
- $I_{Tz} = \int y^2 dA$ e $I_{Ty} = \int z^2 dA$ são os momentos transversais de inércia de área
- F_o é a força axial no eixo, assumida como constante

Contudo, a energia potencial também pode ser expressa no sistema de coordenadas fixo, bastando fazer a conversão entre os 2 referenciais. A matriz de transformação $[H]$ do sistema inercial para o não inercial é mostrada na equação matricial abaixo:

$$\bar{r} = \begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\Omega.t) & -\sin(\Omega.t) & 0 \\ \sin(\Omega.t) & \cos(\Omega.t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (3.63)$$

Então, fazendo a troca das variáveis, a expressão da energia potencial do eixo no sistema de referência fixo fica:

$$U_E = \frac{EI}{2} \int_0^L [I_{Tz}(\cos(\Omega.t) \frac{d^2v}{dx^2} - \sin(\Omega.t) \frac{d^2w}{dx^2}) + I_{Ty}(\sin(\Omega.t) \frac{d^2v}{dx^2} + \cos(\Omega.t) \frac{d^2w}{dx^2})^2] dx \\ + \frac{F_o}{2} \int_0^L [(\frac{dv}{dx})^2 + (\frac{dw}{dx})^2] dx \quad (3.64)$$

Devido à simetria transversal do eixo, a energia potencial pode ser escrita em função das coordenadas independentes, conforme a Eq. 3.65 abaixo.

$$U_E = [\frac{EI}{2} \int_0^L h^2(x) dx] (q_1^2 + q_2^2) \quad (3.65)$$

Onde o termo dentro dos colchetes é a rigidez elástica K do eixo e o termo entre parênteses é o quadrado do deslocamento transversal total $|\vec{r}|^2$.

3.3.3 Energia cinética do eixo

Analogamente à expressão do disco, a energia cinética do eixo é representada pela seguinte equação abaixo:

$$T_E = \frac{\rho \cdot A}{2} \int_0^L (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) dx + \frac{\rho \cdot I}{2} \int_0^L (\dot{\Psi}^2 + \dot{\theta}^2) dx + \rho \cdot I L \Omega^2 + 2\rho \cdot I \Omega \int_0^L \dot{\Psi} \theta dx \quad (3.66)$$

Onde:

- ρ é a massa específica
- A é a área da seção transversal
- $I = I_{Tz} = I_{Ty}$ é o momento transversal de inércia de área

A primeira parcela é a energia cinética de translação, referente às flexões transversais, enquanto a segunda corresponde aos movimentos de rotação, a terceira aos movimentos de torção, o qual não será analisado neste trabalho, e a quarta representa a energia cinética associada ao efeito giroscópico.

Inserindo à Eq. 3.66 as coordenadas generalizadas, a equação se torna:

$$T_E = \frac{1}{2} [\rho \cdot A \int_0^L f^2(x) dx + \rho \cdot I \int_0^L g^2(x) dx] (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \rho \cdot I L \Omega^2 - [\rho \cdot I \Omega \int_0^L g^2(x) dx] \dot{q}_1 \dot{q}_2 \quad (3.67)$$

3.3.4 A função dos mancais

Os mancais de deslizamento, que são atualmente utilizados nos sistemas de propulsão marítima, possuem um fluido lubrificante na superfície interna de rolamento, por onde pequenos trechos do eixo deslizam durante o seu movimento de rotação. Sobre esta película de óleo, ocorrem o tempo todo variações da pressão hidrodinâmica, envolvendo temperatura, viscosidade, área de contato, velocidade de rotação e outras variáveis. Para manter o equilíbrio dinâmico, essas forças de reação internas ao mancal fazem as propriedades de rigidez e amortecimento se alterarem em função da velocidade de rotação Ω do eixo.

A Fig. 3.11 apresenta o modelo de um mancal de deslizamento.

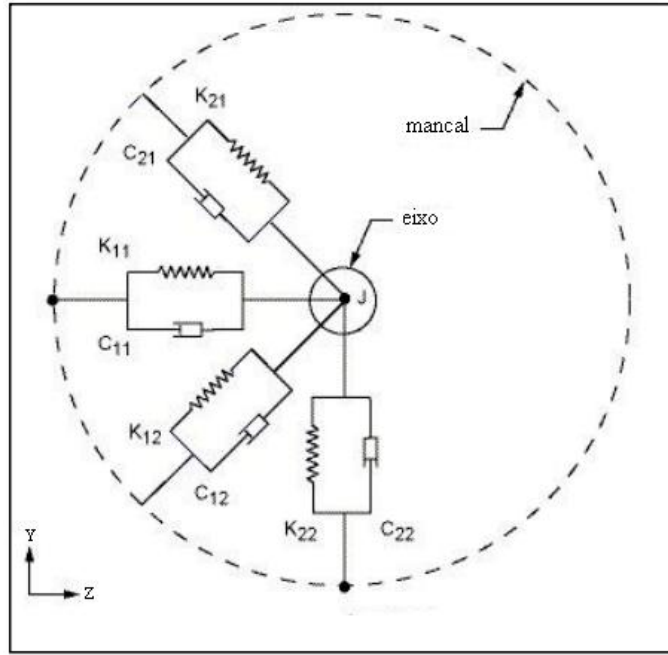


Figura 3.11: *Modelo de rigidez e amortecimento de mancal de deslizamento.*

O somatório dos trabalhos virtuais realizados pelas forças de cada mancal atuando sobre o eixo, em relação ao sistema rotativo, pode ser definido como:

$$\delta W = -k_{11}w\delta w - k_{21}v\delta w - k_{22}v\delta v - k_{12}w\delta v - c_{11}\dot{w}\delta w - c_{21}\dot{v}\delta w - c_{22}\dot{v}\delta v - c_{12}\dot{w}\delta v \quad (3.68)$$

Onde k_{11} , k_{22} , c_{11} e c_{22} são os coeficientes diretos e k_{21} , k_{12} , c_{21} e c_{12} são os coeficientes cruzados nas matrizes de rigidez e amortecimento.

A equação geral do trabalho virtual tem a seguinte forma condensada:

$$\delta W = F_y \cdot \delta q_1 + F_z \cdot \delta q_2 \quad (3.69)$$

Onde F_y e F_z são as forças generalizadas que agem sobre o eixo e são dadas no sistema fixo como:

$$\begin{cases} F_y = -k_{11}f^2(l_2)q_1 - k_{21}f^2(l_2)q_2 - c_{11}f^2(l_2)\dot{q}_1 - c_{21}f^2(l_1)\dot{q}_2 \\ F_z = -k_{12}f^2(l_2)q_1 - k_{22}f^2(l_2)q_2 - c_{12}f^2(l_2)\dot{q}_1 - c_{22}f^2(l_1)\dot{q}_2 \end{cases} \quad (3.70)$$

É possível estimar os coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais conhecendo apenas o tipo de mancal, a sua geometria e as características físicas do fluido interno, porém este não é o foco deste trabalho. Além disso, essas propriedades são fornecidas pelos fabricantes dos mancais ou determinadas por experimentos e, estes valores serão considerados como conhecidos, portanto.

Como a velocidade Ω do eixo altera a configuração de equilíbrio das forças internas, esses coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais acabam variando de forma não linear com a velocidade de rotação do eixo. Essa não linearidade acaba se propagando para a determinação das respostas dinâmicas, dificultando a resolução das equações.

Apesar de ser o mancal que encosta no eixo, existem outros elementos estruturais no navio que servem de suporte para a base e também recebem e transmitem esforços como o casco do navio, o duplo fundo e a fundação. Sendo assim, é fundamental que as rigidezes destes elementos sejam estimadas e incorporadas à rigidez do mancal, já que a rigidez equivalente representará todo este conjunto de molas em série, conforme modelado na Fig. 3.12.

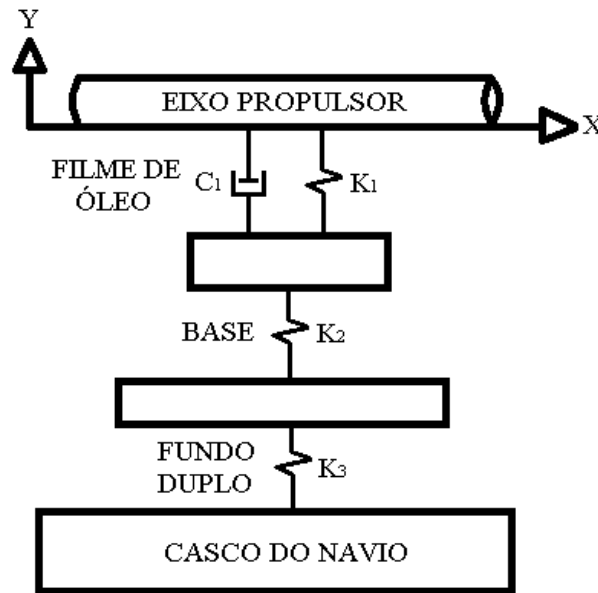


Figura 3.12: Associação de molas dos elementos de suporte.

Neste trabalho, a rigidez considerada nos mancais já representará a rigidez equivalente de todos esses elementos estruturais, juntamente com a própria rigidez do filme de óleo, cuja formulação neste caso é dada por:

$$\frac{1}{K_{EQ}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_3} \quad (3.71)$$

Atualmente, existe um tipo de mancal hidrodinâmico que tem sido muito utilizado em linhas de eixo e outros tipos de máquinas rotativas, que é o mancal do tipo *Tilting Pad*, mostrado na Fig. 3.13.

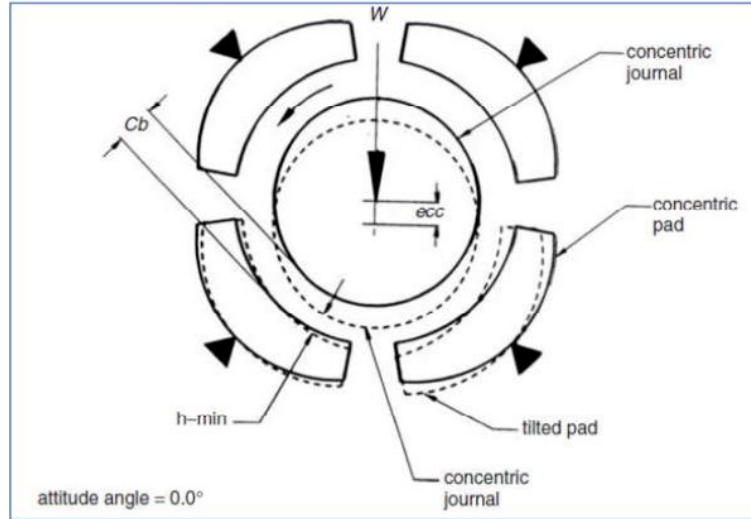


Figura 3.13: Geometria de mancal *Tilting Pad*.

Este tipo de mancal possui sapatas (*pads*) móveis, que se adaptam às condições de carregamento para garantir a estabilidade do sistema. As sapatas podem oscilar livremente de modo que o seu centro de curvatura se mova de um ângulo para criar um filme de óleo fortemente convergente. Então, a sapata é pivotada para garantir que não haja nenhuma reação de momento.

Desta forma, os mancais *Tilting Pad* conseguem manter constantemente nulos os termos acoplados das suas matrizes de rigidez e amortecimento, mas como esses termos são responsáveis por tornar positivo o valor do expoente σ (equação 3.91), causando instabilidade ao sistema, estes mancais tem sido largamente utilizados nas indústrias de máquinas rotativas.

Como consequência, os coeficientes diretos de rigidez e amortecimento, que são os termos da diagonal principal dessas respectivas matrizes do mancal, passam a variar em função da velocidade do eixo, conforme pode-se observar em um exemplo mostrado na Fig. 3.14.

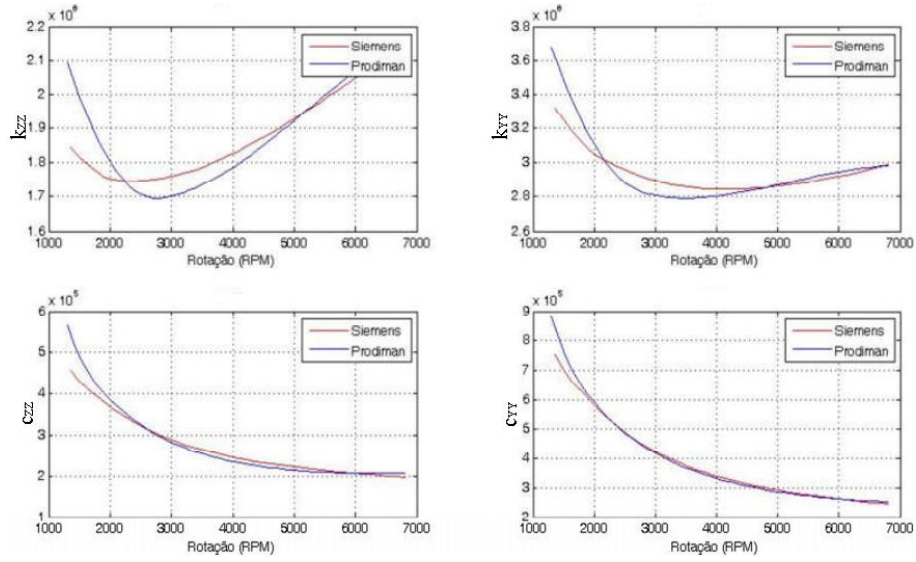


Figura 3.14: Curva dos coeficientes dinâmicos de mancais Tilting Pad.

3.3.5 A equação de Lagrange

A equação geral de *Lagrange* se baseia no balanço energético do sistema mecânico e dá origem às equações que governam o movimento.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL(t, q)}{d\dot{q}_i} \right) - \frac{dL(t, q)}{dq_i} = F \quad (3.72)$$

Onde:

- $L = T - U$ é a função lagrangeana
- T é a energia cinética total
- U é a energia potencial total
- q_i são as coordenadas generalizadas
- F é o vetor de forças generalizadas

Substituindo a função na expressão geral, a nova expressão fica:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{d\dot{q}_i} \right) - \frac{dT}{dq_i} + \frac{dU}{dq_i} = F \quad (3.73)$$

Empregando-se a equação de *Lagrange* nas equações de energia explicitadas acima e adotando-se as deflexões laterais nos eixos Y e Z como coordenadas generalizadas, chega-se às seguintes equações de movimento:

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - G\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = F_y(t) \\ m\ddot{q}_2 + G\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = F_z(t) \end{cases} \quad (3.74)$$

Onde:

- $G = I_x \cdot g^2(l_1) + 2\rho \cdot I \int_0^L g^2(x)dx$ é o efeito giroscópico
- $m = m_D f^2(l_1) + I_x g^2(l_1) + \rho \cdot A \int_0^L f^2(x)dx + \rho \cdot I \int_0^L g^2(x)dx$ é a massa
- $k = EI \cdot \int_0^L h^2(x)dx$ é a rigidez

3.3.6 Movimento de vibração livre

Para resolver o problema de vibração livre e encontrar os parâmetros modais, o amortecimento é desprezado e desconsidera-se a atuação de forças externas no sistema e, desta forma, temos o sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - G\Omega\dot{q}_2 + k_{11}q_1 = 0 \\ m\ddot{q}_2 + G\Omega\dot{q}_1 + k_{22}q_2 = 0 \end{cases} \quad (3.75)$$

Representando o sistema na forma matricial, se tem:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & -G \\ G & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.76)$$

Adotando-se para as EDO lineares e homogêneas a solução de Euler, teremos:

$$\begin{cases} q_1(t) = Q_1(e)^{\lambda \cdot t} \\ q_2(t) = Q_2(e)^{\lambda \cdot t} \end{cases} \quad (3.77)$$

Onde $\lambda = \sigma + \omega \cdot i$ é o autovalor complexo do sistema rotativo, sendo que a parte real é o expoente da função exponencial e representa a envoltória da curva amplitude de resposta no tempo e a parte imaginária representa o movimento

oscilatório das amplitudes.

Realizando-se as substituições na Equação 5.2, chega-se a:

$$\begin{bmatrix} k_{11} + m\lambda^2 & -G\Omega\lambda \\ G\Omega\lambda & k_{22} + m\lambda^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.78)$$

Para se obter as soluções não triviais, o determinante da matriz principal deve ser nulo e assim será obtido um polinômio característico de 4 grau, de acordo com a Eq. 3.79.

$$m^2\lambda^4 + (k_1m + k_2m + G^2\Omega^2)\lambda^2 + k_{11}k_{22} = 0 \quad (3.79)$$

A partir da equação característica, surgem duas possibilidades, pois o rotor pode estar parado ($\Omega = 0$) ou girando ($\Omega \neq 0$).

- Quando o eixo está parado, as 4 raízes são dadas por:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \omega_1 i \quad (3.80)$$

e

$$\lambda_3 = \lambda_4 = -\omega_2 i \quad (3.81)$$

Onde $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_{11}}{m}}$ e $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_{22}}{m}}$ são as 2 frequências naturais dos movimentos laterais de flexão do eixo nas direções Y e Z , respectivamente, quando $\Omega = 0$. Essas frequências são constantes com o eixo em estado estacionário.

- Quando o eixo está girando, em virtude do efeito giroscópico, os autovalores λ deixam de ser constantes e passam a variar em função da velocidade de rotação Ω , da seguinte forma:

$$\lambda_1(\Omega) = \sqrt{\frac{\omega_1^2}{2} + \frac{\omega_2^2}{2} + \frac{G^2\Omega^2}{2m^2}} - \sqrt{\frac{\omega_1^2}{2} + \frac{\omega_2^2}{2} + \frac{G^2\Omega^2}{2m^2} - \omega_1^2 \cdot \omega_2^2} \quad (3.82)$$

$$\lambda_2(\Omega) = \sqrt{\frac{\omega_1^2}{2} + \frac{\omega_2^2}{2} + \frac{G^2\Omega^2}{2m^2}} + \sqrt{\frac{\omega_1^2}{2} + \frac{\omega_2^2}{2} + \frac{G^2\Omega^2}{2m^2}} - \omega_1^2 \cdot \omega_2^2 \quad (3.83)$$

Mas quando, em caso particular, os mancais são isotrópicos ($k_{11} = k_{22}$), as frequências naturais ω_1 e ω_2 se igualam e então as expressões dos autovalores se tornam:

$$\lambda_1(\Omega) = \sqrt{\omega_1^2 + \frac{G^2\Omega^2}{2m^2}} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4m^2\omega_1^2}{G^2\Omega^2}}\right) \quad (3.84)$$

$$\lambda_2(\Omega) = \sqrt{\omega_1^2 + \frac{G^2\Omega^2}{2m^2}} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4m^2\omega_1^2}{G^2\Omega^2}}\right) \quad (3.85)$$

Então, as frequências naturais ω_n , que antes eram constantes, passam a divergir com Ω em 2 valores. Uma delas vai aumentar a partir de $\omega_n(\Omega = 0)$, que é a frequência natural de precessão direta, e a outra vai diminuir a partir de $\omega_n(\Omega = 0)$, que é a frequência natural de precessão retrógrada.

A precessão direta, conhecida na rotodinâmica como *forward whirling* gira no mesmo sentido que a rotação do eixo, enquanto que a precessão retrógrada, a *backward whirling*, gira no sentido contrário ao do eixo, conforme mostrado na Figura 1.2.

3.3.7 Movimento com vibração forçada

Agora será considerada a ação dos agentes externos agindo sobre a linha de eixo. As principais excitações num sistema propulsor são o torque axial que vem do motor e é transmitido pela caixa redutora ao eixo, o empuxo no propulsor que, além da frequência, também varia na amplitude e ponto de aplicação e o desbalanceamento, que é a principal fonte de vibração em qualquer rotor.

3.2.7.1 Resposta a uma excitação harmônica (sem amortecimento)

A análise harmônica é muito utilizada em vibrações, pois além de ter uma forma simples, ela pode representar uma grande parte das perturbações externas por um

somatório de n funções harmônicas com amplitudes e frequências diferentes cada uma.

Será adotada uma força harmônica fixa no espaço, com amplitude constante F_o e frequência ω agindo apenas na direção Y , sendo $F_y = F_o \sin(\omega.t)$ e $F_z = 0$.

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - G\Omega\dot{q}_2 + k_1q_1 = F_o \sin(\omega.t) \\ m\ddot{q}_2 + G\Omega\dot{q}_1 + k_2q_2 = 0 \end{cases} \quad (3.86)$$

Admitindo-se q_1 e q_2 como soluções harmônicas, apresentadas na Eq. 3.77, se chegará nas seguinte expressões para as amplitudes:

$$Q_1(\omega) = \frac{(k_2 - m\omega^2)F_o}{(k_1 - m\omega^2)(k_2 - m\omega^2) - G^2\Omega\omega^2} \quad (3.87)$$

$$Q_2(\omega) = \frac{-G\Omega\omega F_o}{(k_1 - m\omega^2)(k_2 - m\omega^2) - G^2\Omega\omega^2} \quad (3.88)$$

As frequências naturais de precessão serão os valores que levarão teoricamente as amplitudes de resposta não amortecidas a um valor infinito. Sendo assim, elas serão os respectivos pólos de Q_1 e Q_2 , originando a equação abaixo.

$$m^2\omega^4 - (k_1m + k_2m + G^2\Omega^2)\omega^2 + k_1k_2 = 0 \quad (3.89)$$

Como as amplitudes são diferentes, então as órbitas serão elípticas e o mancal mais rígido será responsável pela inversão de sentido das frequências naturais de precessão.

Supondo $k_2 > k_1$, a precessão será direta se $\omega > \sqrt{\frac{k_2}{m}}$ e será retrógrada se $\omega < \sqrt{\frac{k_2}{m}}$.

3.2.7.1 Resposta a uma excitação harmônica (com amortecimento)

Todos os casos apresentados anteriormente desprezaram a influência do amortecimento, que tem uma importância primordial para uma linha de eixo de navio. Os amortecimentos do eixo e dos mancais devem ser considerados na análise, entretanto, cabe explicar que o amortecimento do eixo é muito baixo em relação ao dos mancais.

Para um modelo com 4 graus de liberdade, podem ser definidas as coordenadas generalizadas para representar os deslocamentos lineares e angulares para qualquer ponto do eixo, conforme a Eq. 3.95:

$$\vec{q} = \begin{Bmatrix} v \\ w \\ \Psi \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (3.90)$$

Pode-se escrever genericamente a equação de um sistema como:

$$M\ddot{\vec{q}} - G\Omega\dot{\vec{q}} + C\dot{\vec{q}} + K\vec{q} = \vec{F}(t) \quad (3.91)$$

As matrizes de inércia e efeito giroscópico para este sistema são da forma:

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_D \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

Onde m é a massa e I_D é o momento de inércia de massa transversal.

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_P \\ 0 & 0 & -I_P & 0 \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

Onde I_P é o momento de inércia de massa polar.

Segundo (NETO, 2007), a matriz de rigidez $[K]$ está associada aos mancais, que representam a flexibilidade do sistema.

Desconsiderando-se os acoplamentos entre os coeficientes de rigidez nas direções transversais Y e Z e baseando-se na equação de energia potencial de mancais isotrópicos k_1 e k_2 , a matriz de rigidez dos mancais fica representada como:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 & 0 & k_1 L_1 - k_2 L_2 \\ 0 & k_1 + k_2 & -k_1 L_1 + k_2 L_2 & 0 \\ 0 & -k_1 L_1 + k_2 L_2 & k_1 L_1^2 - k_2 L_2^2 & 0 \\ k_1 L_1 - k_2 L_2 & 0 & 0 & k_1 L_1^2 - k_2 L_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

$$F(\vec{t}) = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{Bmatrix} \quad (3.95)$$

Considerando o par de equações diferenciais para 2 graus de liberdade e mancais assimétricos dado na Eq. 3.96.

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - G\Omega\dot{q}_2 + c_1\dot{q}_1 + k_1q_1 = F_y(t) \\ m\ddot{q}_2 + G\Omega\dot{q}_1 + c_2\dot{q}_2 + k_2q_2 = F_z(t) \end{cases} \quad (3.96)$$

E adotando-se como formato de resposta as funções na Eq. 3.80, a solução de vibração livre pode ser obtida a partir da seguinte equação característica:

$$m^2\lambda^4 + m(c_1 + c_2)\lambda^3 + (k_1m + k_2m + c_1c_2 + G^2\Omega^2)\lambda^2 + (k_2c_1 + k_1c_2)\lambda + k_1k_2 = 0 \quad (3.97)$$

Este polinômio característico pode ser resolvido de forma analítica ou numérica, mas em geral, os coeficientes c_1 e c_2 tem valores pequenos e as raízes da equação são complexas em pares conjugados, no formato da Equação 3.98.

$$\lambda = \sigma + \omega_d i \quad (3.98)$$

sendo que a parte real σ , dada pela expressão $-\zeta.\omega_n$, determina a estabilidade do sistema, enquanto ω_d é a frequência natural amortecida, que é a frequência de precessão do eixo devido ao formato das soluções $y(t)$ e $z(t)$.

A matriz de amortecimento é simétrica e tem pouquíssima influência sobre

as frequências naturais. Por esta razão que ela é desprezada no problema de autovalor, porém ela faz diferença e é muito importante no cálculo da resposta, pois é o amortecimento que dissipa energia mecânica do sistema e isso é favorável para reduzir as grandes amplitudes atingidas nas velocidades críticas, ou seja, nos pontos de ressonância.

O amortecimento pode ser idealizado de diversas formas, contudo, adotando-se um modelo viscoso linear como o amortecimento proporcional à massa e à rigidez, ele pode ser escrito como:

$$[C] = a[M] + b[K] \quad (3.99)$$

Onde a e b são as constantes de proporcionalidade, as quais geralmente são ajustadas a partir dos resultados de testes experimentais.

Após encontrar as 4 raízes λ que satisfazem a equação 3.75, estes autovalores vão constituir a resposta completa do sistema, que é dada pela soma das parcelas em regime transiente e em regime permanente, de acordo com a equação 3.92.

$$X(t) = A(e)^{\sigma.t} \cdot [\cos(\omega_d t) + i \sin(\omega_d t)] \quad (3.100)$$

Se $\sigma > 0$, a resposta forçada do movimento crescerá exponencialmente com o tempo e isso é conhecido como um regime instável. O sinal algébrico de σ depende da intensidade relativa dos coeficientes acoplados na matriz de rigidez do sistema.

3.2.7.2 Resposta ao desbalanceamento

Diz-se que um rotor está desbalanceado quando o centro de massa não coincide com o centro geométrico do eixo de rotação. O nível do desbalanceamento é caracterizado por dois parâmetros: a excentricidade e , que é a distância do centro geométrico até o centro de gravidade e o ângulo $\alpha = \Omega.t$, entre A e B, conforme a figura 3.12. Existe o desbalanceamento estático e o dinâmico. O estático é constante e mantém esses 2 valores, tanto parado quanto girando. Por outro lado, o desbalanceamento dinâmico é o acréscimo da amplitude do desbalanceamento quando o eixo está em rotação, ou seja, é a resposta dinâmica.

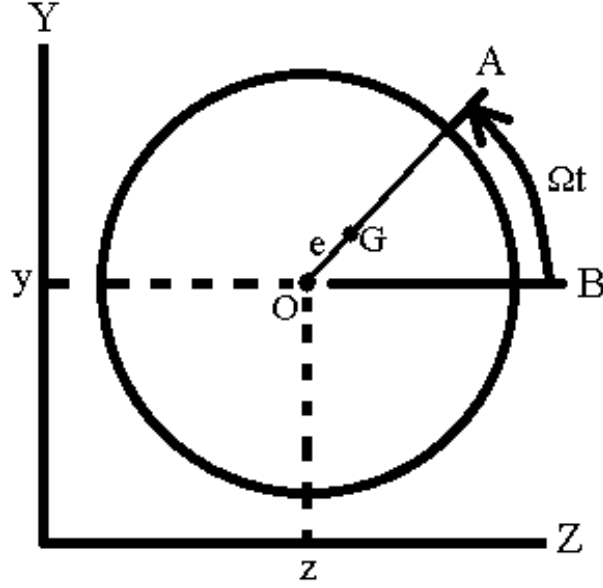


Figura 3.15: *Massa desbalanceadora.*

Sendo que a massa m_u representa o saldo total das massas desbalanceadoras no rotor e, portanto, o centro de gravidade transversal fica na posição dela.

A excitação realizada pelo desbalanceamento do rotor é um caso particular da excitação harmônica, pois essa massa m_u , ao girar solidariamente acoplada ao eixo, gera uma força centrífuga equivalente exatamente na mesma frequência de rotação do rotor, ou seja, $\omega = \Omega$, e por isso que o desbalanceamento é a forma mais comum de excitação síncrona nos rotores.

Supondo que essa massa esteja na posição longitudinal $x = x_u$, então $\bar{m}_u = m_u \cdot f(x_u)$ e fazendo a decomposição da força centrífuga nas direções Y e Z , teremos:

$$\vec{F}_{CP} = 0\vec{i} + \bar{m}_u \cdot e \cdot \Omega^2 \cdot \sin(\Omega \cdot t) \vec{j} + \bar{m}_u \cdot e \cdot \Omega^2 \cdot \cos(\Omega \cdot t) \vec{k} \quad (3.101)$$

E então, o sistema com as EDO lineares e heterogêneas será:

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - G\Omega\dot{q}_2 + k_1q_1 = m_u \cdot e \cdot \Omega^2 \cdot f(x_u) \cdot \sin(\Omega \cdot t) \\ m\ddot{q}_2 + G\Omega\dot{q}_1 + k_2q_2 = m_u \cdot e \cdot \Omega^2 \cdot f(x_u) \cdot \cos(\Omega \cdot t) \end{cases} \quad (3.102)$$

Admitindo-se como soluções nas coordenadas generalizadas:

$$\begin{cases} q_1(t) = Q_1 \sin(\Omega.t) \\ q_2(t) = Q_2 \cos(\Omega.t) \end{cases} \quad (3.103)$$

Realizando a substituição das variáveis e fazendo as simplificações algébricas, serão obtidas as seguintes amplitudes de resposta:

$$Q_1 = \frac{[k_2 - (m + a)\Omega^2]\overline{m}_u.e.\Omega^2}{(k_1 - m\Omega^2)(k_2 - m\Omega^2) - G^2\Omega^4} \quad (3.104)$$

$$Q_2 = \frac{[k_1 - (m + a)\Omega^2]\overline{m}_u.e.\Omega^2}{(k_1 - m\Omega^2)(k_2 - m\Omega^2) - G^2\Omega^4} \quad (3.105)$$

A velocidade crítica é o valor de Ω que torna as amplitudes de resposta muito altas e, no caso de excitação por desbalanceamento, é necessário que o denominador da fração tenda a zero para que a razão tenda ao infinito, portanto, as velocidades críticas de uma linha de eixo com mancais assimétricos são dadas pelas raízes da equação abaixo.

$$(m^2 - G^2)\Omega^4 - m(k_1 + k_2)\Omega^2 + k_1k_2 = 0 \quad (3.106)$$

No caso geral, as órbitas serão elípticas, uma vez que as amplitudes são diferentes. O sentido da frequência natural de precessão é feito pelo estudo de sinais da Eq. 3.106, da seguinte forma:

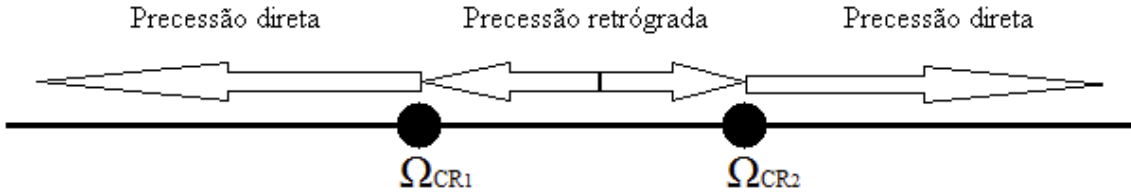


Figura 3.16: Condições para os tipos de precessão

Sendo que as velocidades críticas são:

$$\Omega_{CR1} = \sqrt{\frac{k_1}{m + a}} \quad (3.107)$$

$$\Omega_{CR2} = \sqrt{\frac{k_2}{m+a}} \quad (3.108)$$

O gráfico de amplitude e fase da resposta no domínio da frequência podem ser vistos na figura abaixo.

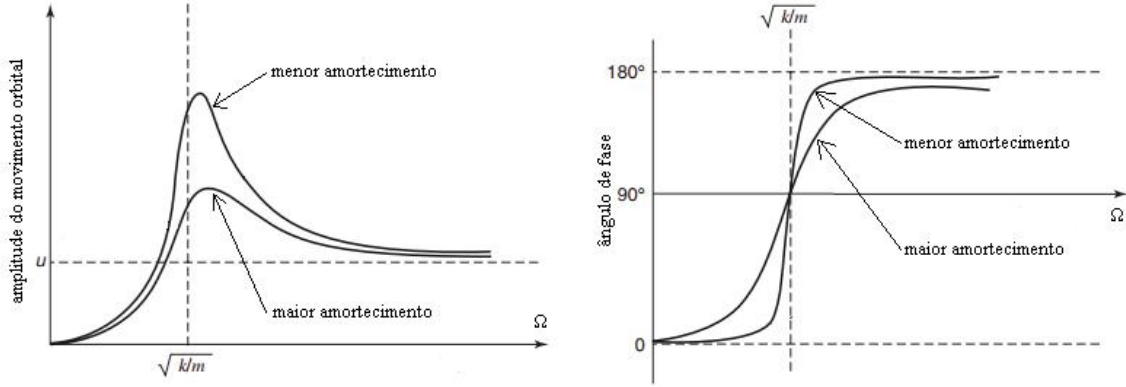


Figura 3.17: *Resposta ao desbalanceamento (amplitude e fase)*

No gráfico de amplitude, a região à esquerda da ponto de ressonância é dominada pela rigidez, a região central é dominada pelo amortecimento e a região à direita é dominada pela inércia.

O valor da amplitude quando $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ tende a infinito pela efeito da amplificação, entretanto, em casos reais, onde existe algum tipo de amortecimento, a amplitude se reduz com o aumento da taxa de amortecimento, tornando-se um valor finito.

O valor de u é a resposta estática, onde o eixo está parado ($\Omega = 0$) e pode-se observar que, para velocidades superiores à frequência natural ($\Omega > \sqrt{\frac{k}{m}}$), a amplitude da resposta começa a diminuir com o aumento de Ω , tendendo a convergir para u . Este fato explica porque é mais favorável operar em faixas acima das velocidades críticas do que abaixo.

No caso particular de mancais isotrópicos, serão obtidas amplitudes de resposta iguais, de acordo com a Equação 3.109.

$$Q_1 = Q_2 = \frac{\bar{m}_u \cdot e \cdot \Omega^2}{k + (G - m)\Omega^2} \quad (3.109)$$

Como o raio das órbitas é a composição das amplitudes nas direções transversais ($/\vec{r}/^2 = Q_1^2 + Q_2^2$), pode-se concluir que, quando os mancais são isotrópicos, as amplitudes são iguais e, portanto, as órbitas são circulares já que o raios são sempre iguais para qualquer velocidade Ω do eixo.

Neste caso, a velocidade crítica para mancais isotrópicos é obtida por:

$$\Omega_{CR} = \sqrt{\frac{k}{m - G}} \quad (3.110)$$

Capítulo 4

Metodologia de análise

4.1 Modelagem da linha de eixo

Para a obtenção das frequências naturais pelo métodos dos elementos finitos, o eixo propulsor deve ser modelado com elementos de viga unidimensional.

4.1.1 Premissas adotadas

Serão adotadas para a construção do modelo matemático da linha de eixo as seguintes considerações:

- ◇ O material a ser utilizado é elástico, homogêneo, isotrópico e sem deformações iniciais;
- ◇ Foram desconsiderados a aceleração da gravidade e os efeitos térmicos;
- ◇ As deflexões do eixo são representadas pelo deslocamento dos pontos da linha central;
- ◇ A rigidez adotada nos mancais será a rigidez equivalente entre a rigidez do filme de óleo e os demais elementos que formam o suporte;
- ◇ A origem do eixo longitudinal X coincide com o centro geométrico do hélice;
- ◇ O hélice será modelado como uma massa pontual rígida na extremidade esquerda, onde serão inseridos os seus momentos de inércia diametral e polar;
- ◇ As propriedades elásticas do hélice serão desprezadas;
- ◇ Serão admitidos 4 graus de liberdade por nó, 2 de rotação e 2 de translação nos eixos Y e Z ;

◊ O sistema tem um comportamento dinâmico linear.

Na Figura 4.1, pode-se observar o modelo matemático geral que será adotado.

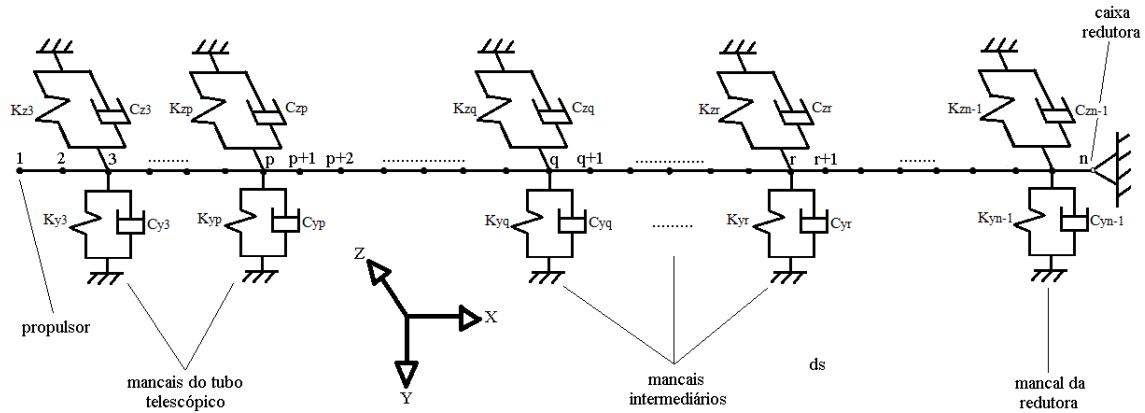


Figura 4.1: *Modelo da linha de eixo em elementos finitos.*

4.2 Fluxograma

A figura 5.1 mostra a sequência cronológica de análise.

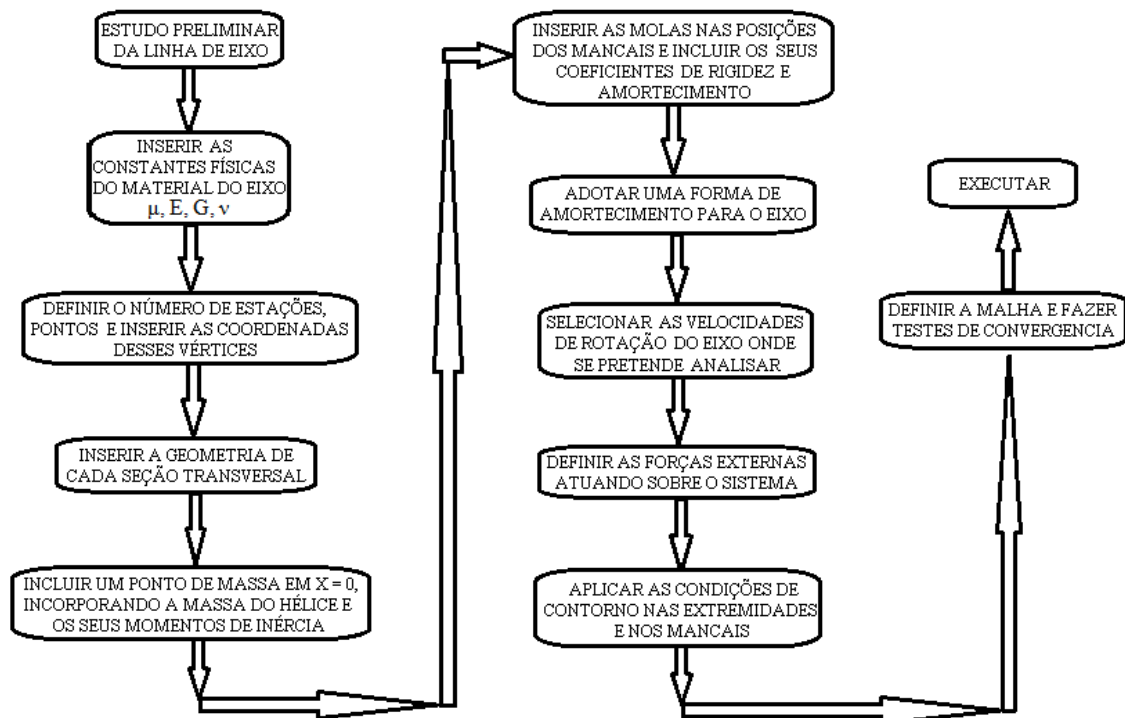


Figura 4.2: *Fluxograma da metodologia.*

Passo 1

Conforme o fluxograma acima, para realizar a modelagem computacional em um programa comercial de elementos finitos, o primeiro passo é estudar todos os elementos do eixo propulsor para coletar os dados de entrada necessários. São eles as dimensões e a geometria do eixo, as propriedades de inércia do propulsor e as posições longitudinais dos mancais, após o alinhamento do eixo.

Passo 2

O segundo passo é ajustar no *software* as principais propriedades dos materiais que compõem o eixo como a massa específica μ , os módulos de elasticidade longitudinal E e transversal G e o coeficiente de *Poisson* ν .

Passo 3

O terceiro passo é avaliar a quantidade de n pontos no eixo longitudinal que será utilizada para definir o modelo, definindo também as coordenadas espaciais na direção X . O primeiro vértice, em $x = 0$, ficará sobre o centro geométrico do propulsor e, sempre que a geometria da seção transversal mudar, é necessário definir um ponto nessa transição. Então deve-se unir cada 2 pontos consecutivos do início até o fim, definindo as $n - 1$ estações, formando as linhas de corpo do modelo.

Passo 4

O passo quatro consiste em inserir as dimensões de todas as seções transversais de cada estação. Deste modo, o programa automaticamente calculará as propriedades físicas que só dependem da geometria como as áreas e os momentos de inércia de área de cada estação.

Passo 5

O quinto passo é adicionar uma massa pontual na origem, onde o propulsor será reproduzido. Ele será representado pontualmente, já que se conhece a sua massa m_D , o seu momento de inércia diametral I_D de massa e os seus momentos de inércia transversais de massa I_T . Além disso, deverá ser adicionada no mesmo ponto a massa adicional do propulsor, que pode ser estimada através de formulações já

conhecidas ou programas.

Passo 6

O passo seis é colocar os mancais nas suas respectivas posições longitudinais e então definir os seus coeficientes de rigidez e amortecimento diretos e acoplados. Se o mancal for do tipo *tilting pad*, onde as propriedades de rigidez e amortecimento variam com a frequência de rotação do eixo, deve-se importar os pontos das curvas de $[K]$ e $[C]$ em função de Ω .

Passo 7

O sétimo passo é considerar como será o amortecimento do eixo. Há diversas formas de se modelar o amortecimento estrutural mas uma peculiaridade de linhas de eixo, cujo material geralmente é algum tipo de aço, é que o amortecimento do eixo é muito inferior ao dos mancais e, portanto, será assumido um valor bem pequeno, definindo-se uma taxa de amortecimento constante de 1%. Como a rigidez do eixo só depende da sua geometria, a qual já foi definida inicialmente, não é necessário ajustar esse parâmetro, pois o próprio programa vai calcular por métodos numéricos as rigidezes axial, torcional e flexional.

Passo 8

O oitavo passo é definir a faixa de velocidades de rotação do eixo onde se tem interesse em analisar. As matrizes de rigidez e amortecimento dos mancais podem variar com essa velocidade Ω e como o *software* faz os cálculos para cada velocidade, também é importante definir um incremento $\Delta \Omega$, além de inserir as velocidades mínima e máxima.

Passo 9

O passo nove é inserir os carregamentos externos, que podem ser forças ou momentos. É preciso caracterizar bem a direção e sentido, a magnitude, a frequência e os pontos de aplicação dessas grandezas, pois elas serão responsáveis pela resposta do sistema em regime permanente.

Passo 10

O passo dez é impor as condições de contorno do sistema, o que é imprescindível para não errar na análise. A extremidade do propulsor é livre e não necessita inserir nenhuma restrição no programa, entretanto, na extremidade da caixa redutora, onde foi modelada com um apoio fixo, devem ser impedidos os ângulos de inclinação transversais e o deslocamento axial. Quanto aos mancais, deve se criar duas restrições para avaliar as deflexões laterais nesses pontos: uma de deslocamento e outra de rotação. O deslocamento axial será zerado mas os transversais ficarão livres, assim como as rotações transversais, todavia, a rotação no eixo X será fixada, pois não se pretende fazer análises torcionais neste trabalho.

Passo 11

O último passo é determinar o padrão do tipo de malha e ajustar os comprimentos de cada elemento finito, definindo assim a quantidade de elementos e nós do modelo computacional. O refinamento da malha é feito com testes de convergência, tendo que dosar o custo benefício entre o grau de precisão da solução com o tempo de processamento.

Então, pode-se finalmente executar o programa. Os resultados e outros pontos pós processamento serão detalhados na próxima seção para casos distintos.

Capítulo 5

Avaliação da metodologia proposta

Neste capítulo, realizou-se algumas simulações numéricas visando comparar os resultados obtidos pela metodologia proposta com os de outras técnicas. Foram resolvidos alguns problemas com linhas de eixo de formas distintas e em situações e condições completamente diferentes.

5.1 1º) Linha de eixo do Navio USS Observation Island

No trabalho de HENDERSON (1968), foi criado o código GBRC-3 (*General Bending Response Code*), o qual foi baseado em trabalhos de pesquisa da Marinha norte americana, JASPER (1954), onde o eixo propulsor foi modelado como uma viga de *Timoshenko* não uniforme, sujeito ao efeito da precessão em dois planos ortogonais à viga. Desta forma, são considerados os efeitos da deformação por cisalhamento e a inércia rotativa das seções, tornando o modelo mais próximo do eixo real.

Este código foi desenvolvido no ambiente Fortran IV e transforma as equações diferenciais do movimento em equações de diferenças finitas para resolver o problema de autovalor e obter a resposta às excitações externas através de um algoritmo de busca no domínio da frequência.

O GBRC-3 foi utilizado para analisar um eixo propulsor com 530 polegadas de comprimento (cerca de 13,5 metros), apresentado no trabalho de HENDERSON (1968), e pode ser observado na Fig. 5.1, que também contempla o seu respectivo modelo. Este eixo foi fragmentado em 4 grandes regiões: o propulsor, o tubo telescópico, um trecho livre sem apoio e a caixa redutora de velocidades.

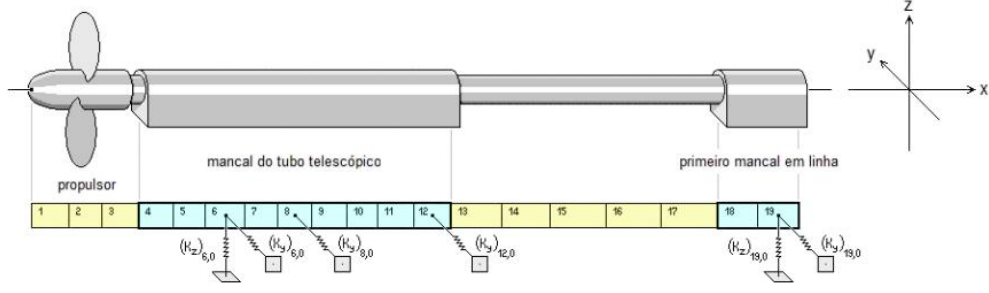


Figura 5.1: *Linha de eixo do USS Observation Island/modelo com seções e molas.*

Ele foi dividido em 19 seções que contêm 18 conexões de viga, indo de centro a centro em cada seção, e 6 conexões de mola, que representam os 3 mancais do tubo telescópico, nas seções 6, 8 e 12, e o primeiro mancal em linha com altos coeficientes de rigidez laterais, localizado na seção 19, que serve para impedir os deslocamentos transversais na região da caixa redutora de velocidades.

As informações de entrada no GBRC-3 são relativas às propriedades das seções, que possuem comprimentos variáveis, e das conexões, e por isso, foi necessário converter esses dados em outras formas diferentes, para servirem de entrada no modelo numérico.

Na Tabela A.1, no apêndice A, pode-se observar todas as informações que serviram de entrada para o problema. Contudo, como as massas são pontuais e não se conhece a geometria completa do eixo, uma vez que a técnica é genérica e serve para qualquer tipo de seção, não seria possível criar um modelo de massa consistente. Para resolver essa adversidade, foi assumido que o eixo possui seções circulares e, baseado nos momentos transversais de inércia de área, foram calculados os raios das circunferências de cada seção transversal e, a partir disso, foi possível modelar o eixo com uma geometria contínua.

Os valores estão nas unidades PSI (libra, segundo, polegada), sendo que X é a coordenada de cada um dos 38 pontos que originaram a geometria do modelo, D_X é o comprimento das conexões, a quarta coluna são as massas de cada seção, τ e τ_D são os momentos polar e diametral de inércia de massa, respectivamente, das conexões e J e I são os momentos polar e transversal de inércia de área, respectivamente, das conexões.

Na Figura 5.2 pode-se visualizar o modelo gerado discretizado.

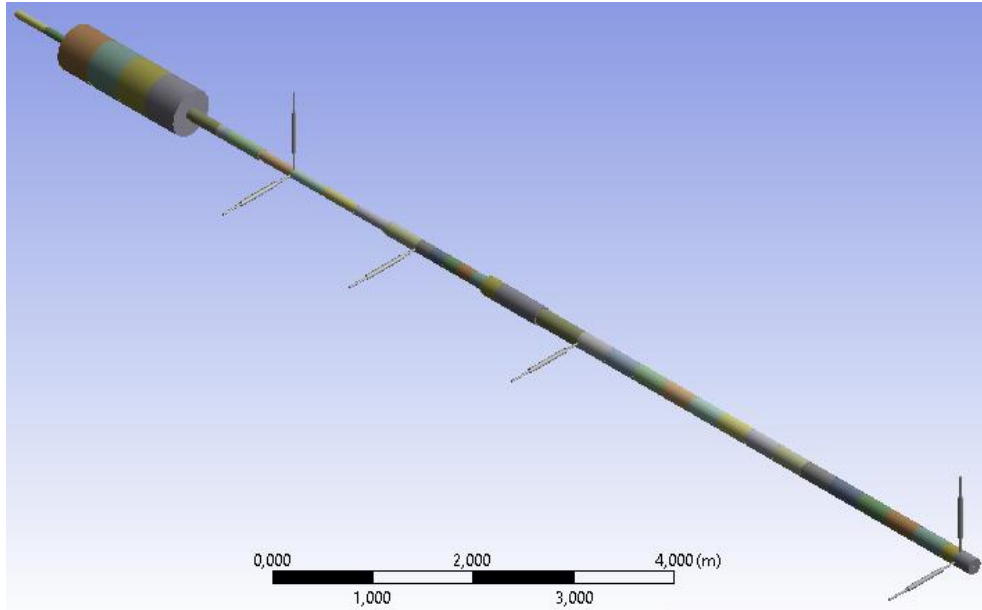


Figura 5.2: *Geometria do modelo discretizado.*

Conforme adotado em HENDERSON (1968), o amortecimento foi desprezado e o propósito era estimar as 3 primeiras frequências naturais e as 3 primeiras formas modais nas direções transversais Y e Z para as relações $h = 1$, $h = 2$ e $h = 4$.

Foram definidas as condições de contorno nos mancais, impedindo a rotação no eixo X , pois não se tem interesse nos movimentos torcionais, zerando a translação no eixo X para que o eixo não tenha deformações axiais e deixando livre as 2 translações e 2 rotações nas direções transversais. Na sequência, foi feito um teste de convergência de malha, onde foram adotados 1089 nós e 544 elementos e então foram selecionadas 3 velocidades para a rotação do eixo.

5.1.1 Comparação das frequências naturais

Nesta seção, são comparadas as 3 primeiras frequências naturais e formas modais de vibrações planares nos planos XOY e XOZ . Na Tabela 5.1, encontram-se as frequências naturais obtidas pelo GBRC-3 (diferenças finitas) e por um programa comercial (elementos finitos).

Tabela 5.1: Comparação das frequências naturais

frequência natural	GBRC-3	Ansys	Diferença
ω_1 (hz)	6,37	5,75	9,7%
ω_2 (hz)	8,08	8,36	3,5%
ω_3 (hz)	23,54	25,39	7,8%

5.1.2 Comparação dos modos laterais de flexão

Nas próximas figuras abaixo, encontram-se os gráficos de algumas deflexões nos eixos Y e Z resolvidos pelas 2 formas.

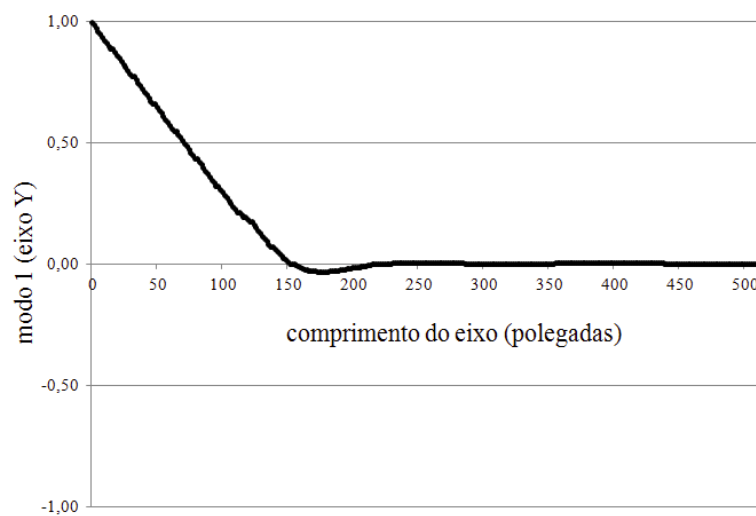


Figura 5.3: *Primeiro modo na direção Y (Ansys).*

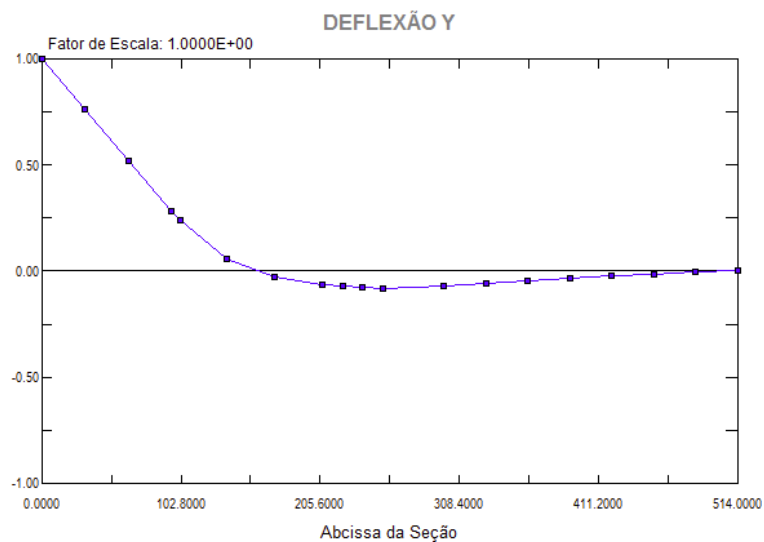


Figura 5.4: *Primeiro modo na direção Y (GBRC-3).*

As curvas do primeiro modo ficaram semelhantes, entretanto, o valor mínimo encontrado pelo Ansys foi de -0,030 e pelo GBRC-3 foi de -0,078.

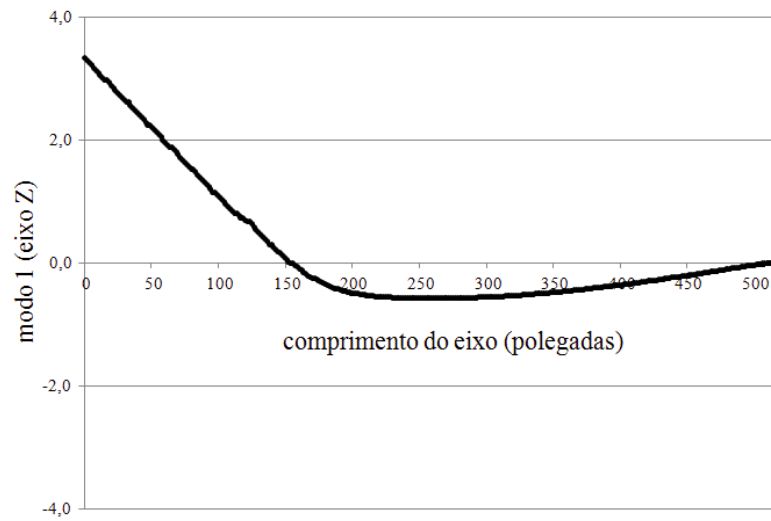


Figura 5.5: *Primeiro modo na direção Z (Ansys).*

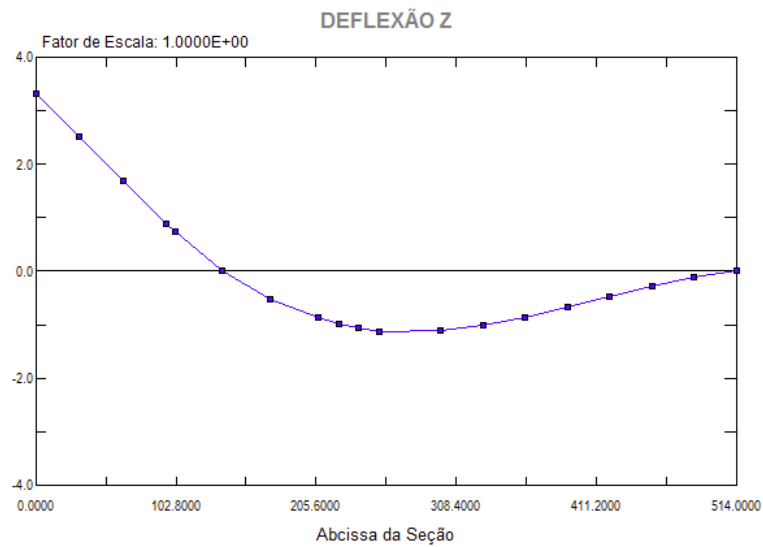


Figura 5.6: *Primeiro modo na direção Z (GBRC-3).*

As curvas do primeiro modo na direção Z ficaram bem semelhantes, porém, os valores mínimos obtidos foram $-0,61$ no Ansys e $-1,1$ no GBRC-3.

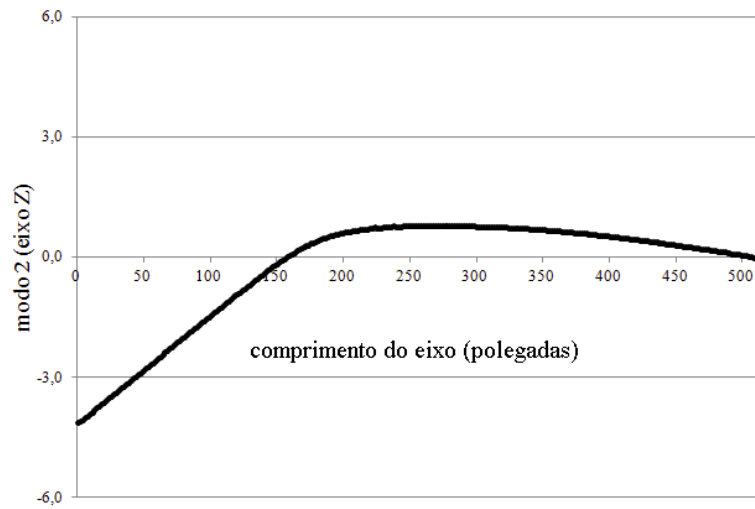


Figura 5.7: *Segundo modo na direção Z (Ansys).*

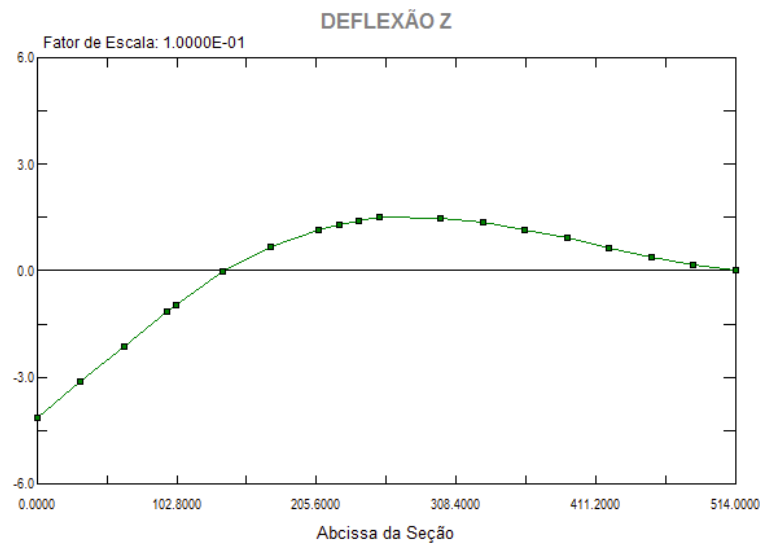


Figura 5.8: *Segundo modo na direção Z (GBRC-3).*

As curvas do segundo modo na direção Z são simétricas às curvas do primeiro modo, logo, as observações são análogas às anteriores.

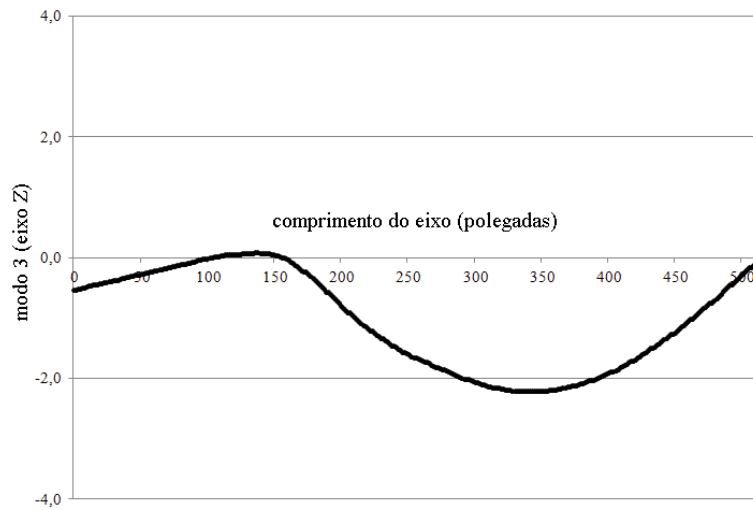


Figura 5.9: *Terceiro modo na direção Z (Ansys).*

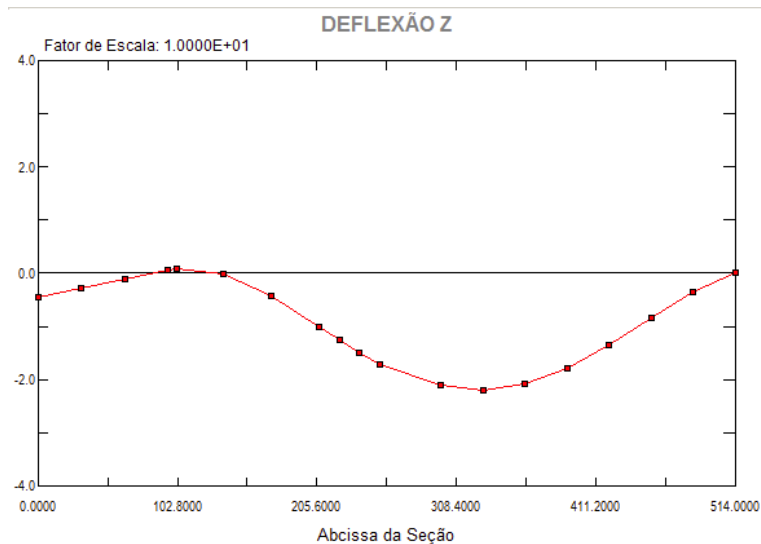


Figura 5.10: *Terceiro modo na direção Z (GBRC-3).*

As curvas do terceiro modo na direção Z ficaram bem parecidas, sendo que os valores mínimos foram de $-2,21$ no Ansys e $-2,39$ no GBRC-3.

5.1.3 Gráfico de órbitas

No estudo de HENDERSON (1968), não foram esboçadas as órbitas, todavia, é simples associar essas superfícies (curvas tridimensionais) com as formas modais (curvas bidimensionais), bastando fazer a projeção delas nos planos XOZ e YOZ .

Cabe esclarecer que, diferentemente do sistema de coordenadas adotado no estudo em referência, o eixo vertical no *software* Ansys é o Y e, portanto, os valores nas direções Y e Z nos diagramas de órbitas estão invertidos.

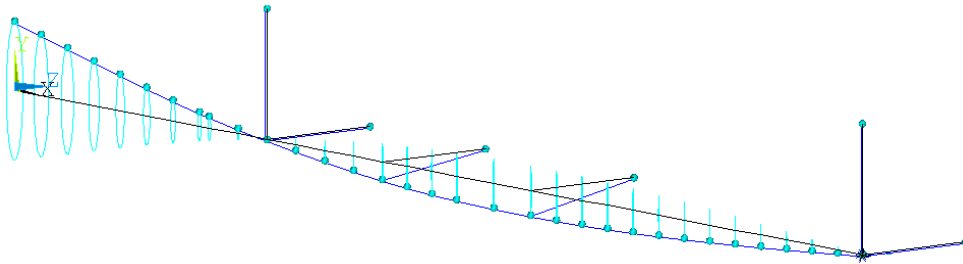


Figura 5.11: Órbitas do primeiro modo de precessão direta.

É notável que as órbitas ficaram muito achatadas no eixo Z e isso se mostra coerente posto que os coeficientes de rigidez na direção Y são bem menores que as na direção Z , permitindo maiores deslocamentos nesta direção. Além disso, existem 2 nós, que são pontos que não sofrem deslocamentos. Eles ficaram exatamente nas posições dos mancais no primeiro modo de precessão direta.

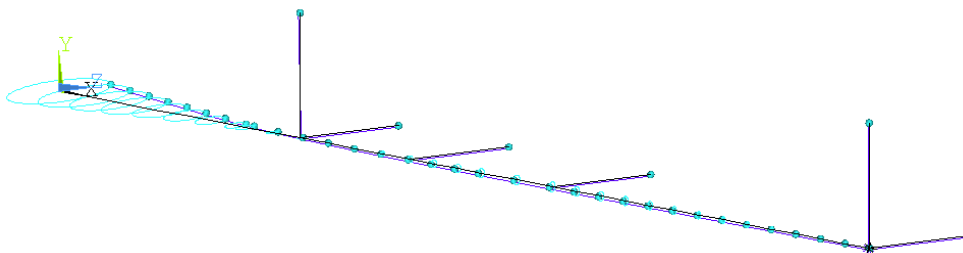


Figura 5.12: Órbitas do segundo modo de precessão direta.

No segundo modo de precessão, as órbitas ficaram bastante achatadas no eixo Y .

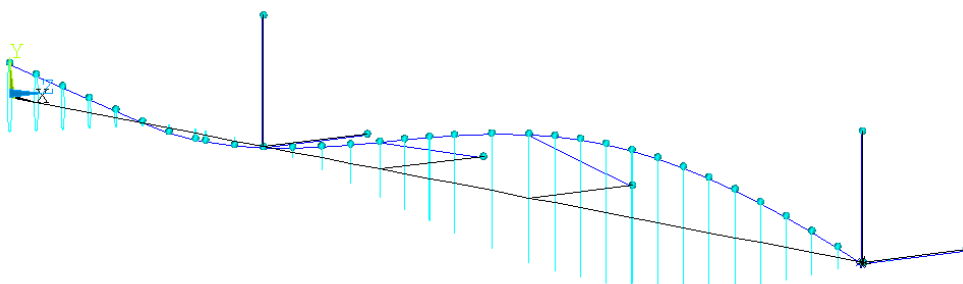


Figura 5.13: Órbitas do terceiro modo de precessão direta.

No terceiro modo, as órbitas também ficaram verticais, semelhantes ao primeiro modo pela mesma razão. Porém, o maior deslocamento neste caso ocorreu entre os 2 mancais e apareceram 3 nós, um em cada mancal e outro entre o propulsor e o mancal mais próximo.

5.1.4 Diagrama de Campbell

Esse modelo de linha de eixo foi executado para 9 velocidades de rotação na faixa de 0,1 *rpm* até 1000 *rpm*, com incrementos em Ω de 125 *rpm*. Abaixo seguem os gráficos de Campbell para relações $h = 1$ e $h = 2$.

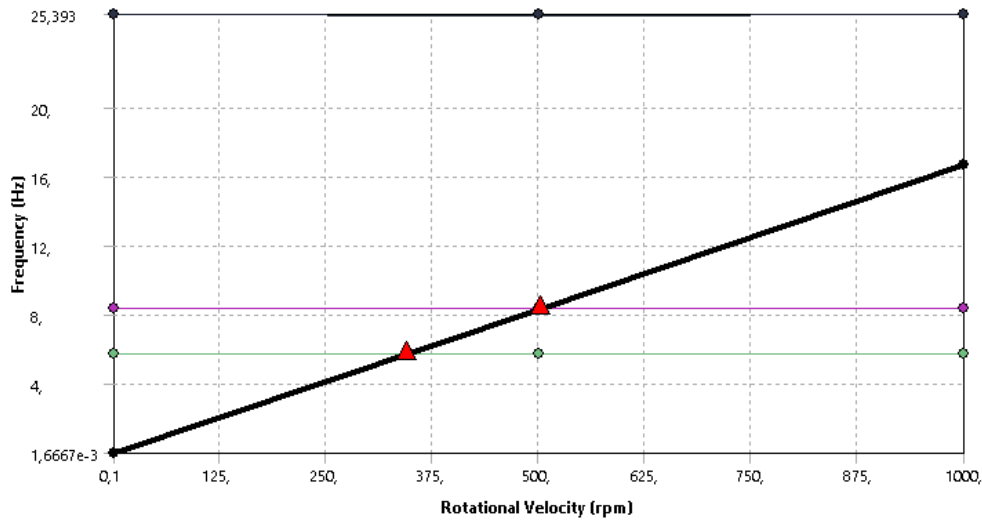


Figura 5.14: *Diagrama de Campbell ($h=1$)*.

O efeito giroscópico em um rotor depende de 3 variáveis: o momento de inércia de massa polar do disco (I_P), a posição longitudinal do disco (x_{disco}) e a velocidade de rotação do eixo (Ω). Em uma linha de eixo, por se tratar de um rotor em balanço, a distância x_{disco} é máxima e sempre favorece o efeito, contudo, a inércia rotacional do disco tem um peso maior e, neste caso, o raio do propulsor é relativamente pequeno. Somado a isso, a velocidade máxima de 1000 *rpm* também é baixa num contexto geral de máquinas rotativas para influenciar significativamente nos momentos giroscópicos. Por essas razões, as 3 primeiras frequências naturais neste exemplo praticamente não sofreram divergência em virtude do efeito giroscópico. Na excitação síncrona existem duas velocidades críticas até $\Omega = 1000$ *rpm*: a primeira em $\Omega = 344,8$ *rpm* e a segunda em $\Omega = 501,8$ *rpm*. Essas faixas de rotação devem ser evitadas com uma margem de pelo menos 15% de afastamento.

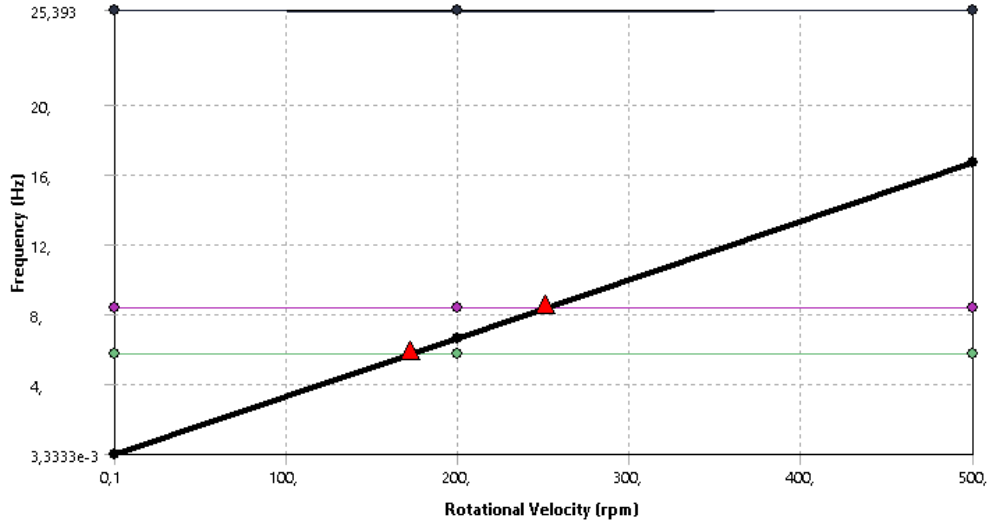


Figura 5.15: *Diagrama de Campbell ($h=2$).*

Para uma frequência de excitação sendo o dobro da frequência de rotação do eixo, as velocidades críticas são $\Omega = 172,4 \text{ rpm}$, $\Omega = 250,9 \text{ rpm}$ até $\Omega = 500 \text{ rpm}$.

5.1.5 Diagrama de Bode

De acordo com (API, 2005), para o modo cônico de vibração, o desbalanceamento crítico adotado em um rotor deveria ser de 4 vezes o valor de U , tal que:

$$U = 6350 \times \left(\frac{W}{N} \right) \quad (5.1)$$

Onde:

- 6350 é uma constante, em $mm.rpm$;
- W é a massa do eixo, em kg ;
- N é máxima velocidade contínua, em rpm ; e
- U é obtido em $g.mm$.

Segundo (API, 2005), o nível de desbalanceamento utilizado em uma determinada velocidade do rotor é a quantidade necessária para elevar a vibração na localização do mancal radial nessa velocidade até uma amplitude limite A_1 , dada em $\mu.m$ por:

$$A_1 = 25,4 \cdot \sqrt{\frac{12000}{N}} \quad (5.2)$$

Onde:

- 25,4 é uma constante, em $\mu.m$;
- 12.000 é uma constante, em rpm ; e
- N é máxima velocidade contínua, em rpm ;

Para este caso, a massa do eixo é 14.047 kg , todavia, em HENDERSON (1968), não foi dada a faixa operativa, porém foi adotada uma velocidade de $N = 200 rpm$ para a simulação. Sendo assim, os valores obtidos por essa referência são $u = 1.783,97 kg.mm$ e $A_1 = 196,8 \mu.m$.

Como o mancal 3, em $x = 7,95 metros$, apresentou as maiores amplitudes na direção Y no primeiro e terceiro modos, a sua posição foi propositalmente escolhida para simular o desbalanceamento. Então, uma única massa desbalanceadora foi colocada a uma distância radial (excentricidade) de $r = 50 mm$, sendo que essa seção circular possui um raio de 90,17 mm . Em seguida, calculou-se a massa desbalanceadora pela razão $\frac{u}{r}$, chegando-se ao valor de $m_u = 35,68 kg$. O módulo da força de desbalanceamento é dado por $|\vec{F}_u| = m_u.r.\Omega^2$, assumindo, portanto, o valor de $|\vec{F}_u| = 782,5 N$ para esta velocidade de rotação.

Para a simulação, foram excitados 100 pontos no domínio da frequência, na faixa de 3 a 28 Hz. Os gráficos de resposta foram separados pelas direções transversais de movimento da linha de eixo.

Resposta na direção Y :

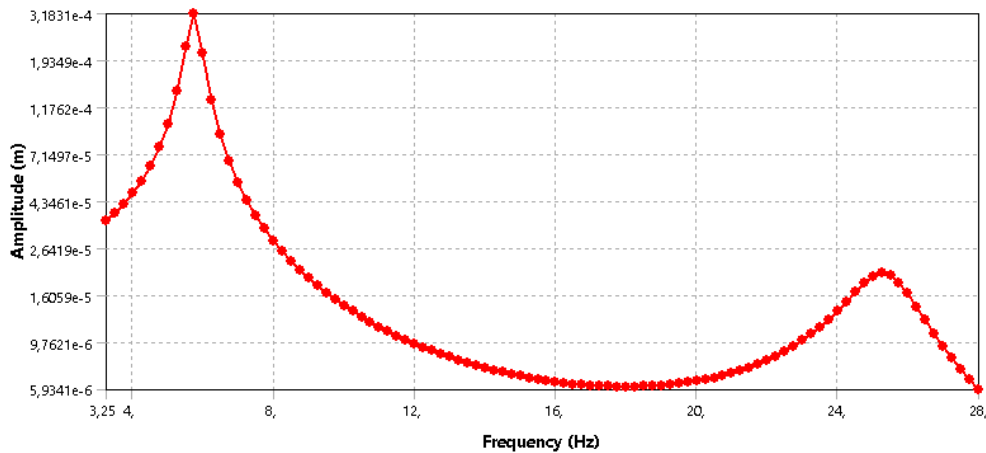


Figura 5.16: *Amplitude de resposta X Frequência.*

A curva de amplitudes do deslocamento transversal da linha de eixo em Y apresenta os valores de pico $318,3 \mu.m$ na primeira frequência natural ($\omega_1 = 5,75 \text{ Hz}$) e $20,4 \mu.m$ na terceira frequência natural ($\omega_3 = 25,39 \text{ Hz}$). Portanto, de acordo com o critério estabelecido em (API, 2005), a resposta no primeiro ponto de ressonância do mancal 3 ficaria acima da tolerância A_1 , entretanto, a resposta no terceiro ponto de ressonância seria aceitável, ficando abaixo de A_1 .

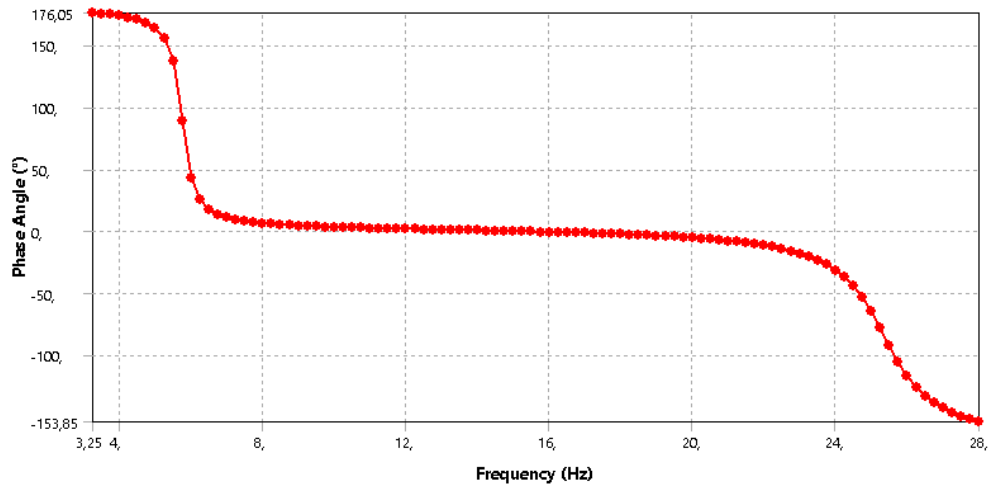


Figura 5.17: *Fase de resposta X Frequência.*

No gráfico de fases mostrado na Fig. 5.17, pode-se observar que sempre que a frequência do termo forçante passa por uma frequência natural do sistema, ocorre uma defasagem de 180 graus e isto acontece em ω_1 e ω_2 na direção Y .

Resposta na direção Z :

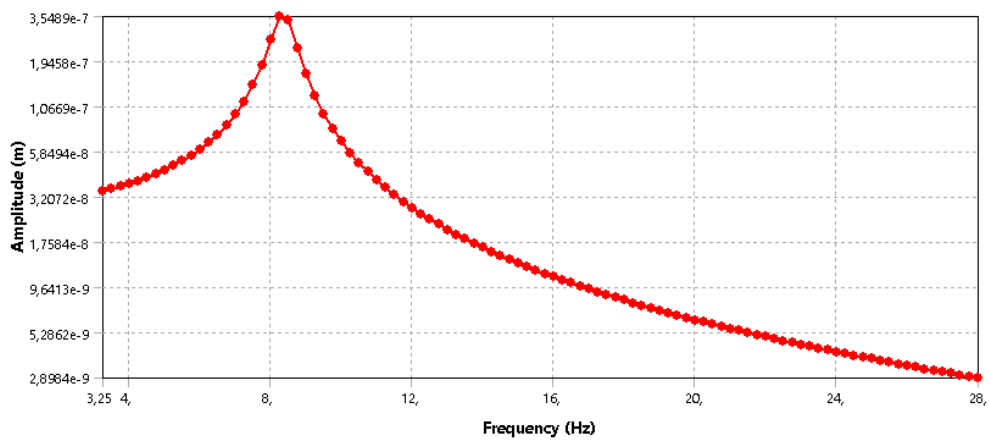


Figura 5.18: *Amplitude de resposta X Frequência.*

Na direção transversal Z , o máximo valor da amplitude ocorreu na ressonância em $\omega_2 = 8,36 \text{ hz}$, atingindo o valor de $0,35 \mu.m$ e ficando muito abaixo do limite aceitável A_1 .

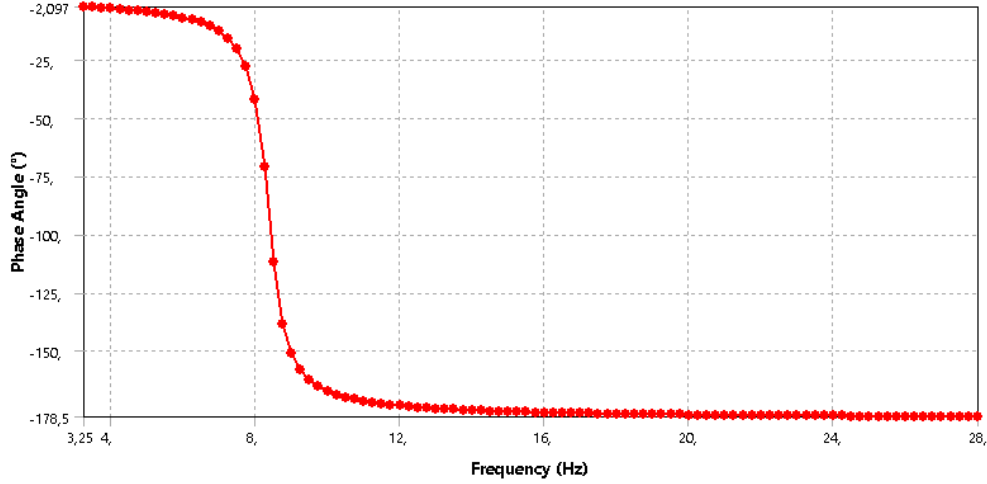


Figura 5.19: *Fase de resposta X Frequência.*

A Fig. ?? apresenta o gráfico de fases, onde pode-se observar a inversão de 180 graus que acontece em $\omega_2 = 8,36 \text{ hz}$, gerada pelo efeito da ressonância.

5.2 2º) Rotor em balanço com 1 disco na extremidade

Em VANCE *et al.* (2010), estão disponíveis exemplos de modelos de rotores que foram solucionados por uma rotina desenvolvida no *software* Matlab. Nesta seção, esses mesmos problemas foram resolvidos numericamente por um programa comercial de elementos finitos. Serão analisadas 4 situações diferentes para um rotor com eixo de aço, maciço, com um comprimento de 182,88 centímetros e seção circular constante, com 15,24 centímetros de diâmetro. Este rotor é biapoado em 2 mancais isotrópicos, com baixo amortecimento e sem termos acoplados nem na rigidez e nem no amortecimento. A posição longitudinal dos mancais, os coeficientes de rigidez direta, assim como as dimensões do disco vão variar e serão informados em cada situação analisada.

Tabela 5.2: Características gerais do rotor

densidade	$\mu = 0,2836 \text{ lbf/pol}^3$	$\mu = 7850,0 \text{ kg/m}^3$
comprimento	$L = 72 \text{ polegadas}$	$L = 1,83 \text{ m}$
seção circular	$D = 6 \text{ polegadas}$	$D = 0,152 \text{ m}$
mancal flexível	$k_{11} = k_{22} = 10^5 \text{ lbf/pol}$	$k_{11} = k_{22} = 17,5 \text{ MN/m}$
mancal rígido	$k_{11} = k_{22} = 10^7 \text{ lbf/pol}$	$k_{11} = k_{22} = 1,75 \text{ GN/m}$
amortecimento	$c_{11} = c_{22} = 2 \text{ lbf.s/pol}$	$c_{11} = c_{22} = 700,5 \text{ N.s/m}$
velocidade do eixo	$\Omega = 5000 \text{ rpm}$	$\Omega = 83,3 \text{ Hz}$

Os principais objetivos desta análise são avaliar como uma massa concentrada em balanço e como o efeito giroscópico podem alterar as frequências naturais de precessão do rotor, girando na velocidade Ω . Cabe destacar que esta é a configuração mais próxima de uma linha de eixo propulsor, onde o disco na ponta representa o hélice e, portanto, tem a maior importância para este trabalho.

5.2.1 A influência de uma massa em balanço sobre as frequências naturais

Neste exemplo, um disco rígido, com um diâmetro de 12 polegadas (30,48 cm) e largura de 3 polegadas (7,62 cm) se encontra concentricamente fixado ao último elemento do eixo com os 2 mancais rígidos, sendo que o primeiro mancal se manterá fixo na extremidade engastada, na extremidade esquerda, mas a posição do segundo mancal vai variar longitudinalmente, ficando o trecho em balanço com comprimentos de 6, 12 e 18 polegadas, em cada situação.

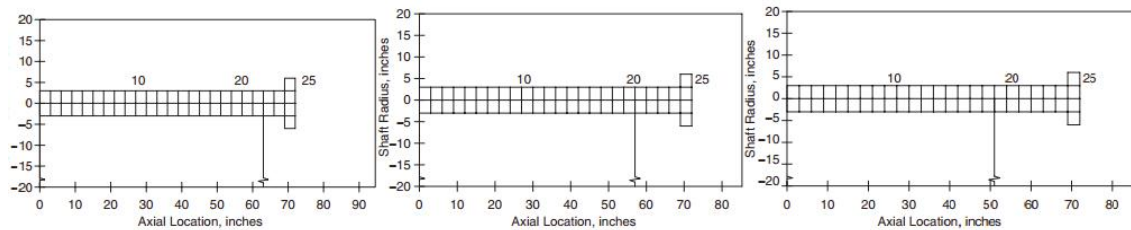


Figura 5.20: Rotores com disco em balanço a 6, 12 e 18 polegadas, respectivamente.

Pode-se constatar pela Fig. 5.20 que a única diferença na configuração dos 3 rotores é o comprimento do trecho do eixo em balanço. Portanto, pode-se afirmar que os diferentes valores das frequências naturais e dos formatos das órbitas modais para uma mesma velocidade do rotor nos 3 casos se devem exclusivamente a este

parâmetro.

Ressalta-se que, nas próximas figuras das órbitas da linha de eixo, os gráficos da linha de cima são oriundos do livro VANCE *et al.* (2010) e os da linha de baixo, originados pelo uso de um programa Ansys. Além disso, foram construídas tabelas para comparar os valores das frequências naturais obtidas pelos dois métodos.

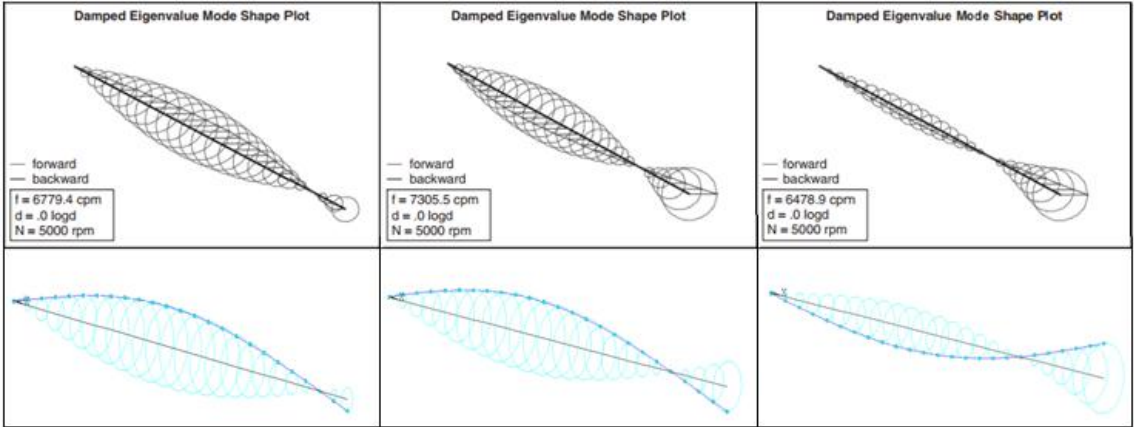


Figura 5.21: Gráfico de órbitas do primeiro modo de precessão com mancais rígidos.

Tabela 5.3: Frequências naturais do primeiro modo de vibração com mancais rígidos

	6 polegadas			12 polegadas			18 polegadas		
	VANCE	Ansys	diferença	VANCE	Ansys	diferença	VANCE	Ansys	diferença
ω_1 (rpm)	6779,4	6295,8	7,68 %	7305,5	7146,6	2,22 %	6478,9	7051,8	8,84 %

Em VANCE *et al.* (2010), não são fornecidos os raios das órbitas para realizar comparações, porém os gráficos do primeiro modo de precessão ficaram muito parecidos.

Como os mancais são rígidos, os nós modais ficaram exatamente sobre as posições dos mancais, impedindo os deslocamentos nesses pontos.

Os raios da órbita na extremidade livre são proporcionais ao comprimento do trecho em balanço, segundo o movimento cônico realizado pela linha de eixo.

A diferença máxima no valor da primeira frequência natural pelos 2 métodos foi de 8,84% e um provável motivo são os erros embutidos nas aproximações realizadas nas resoluções numéricas.

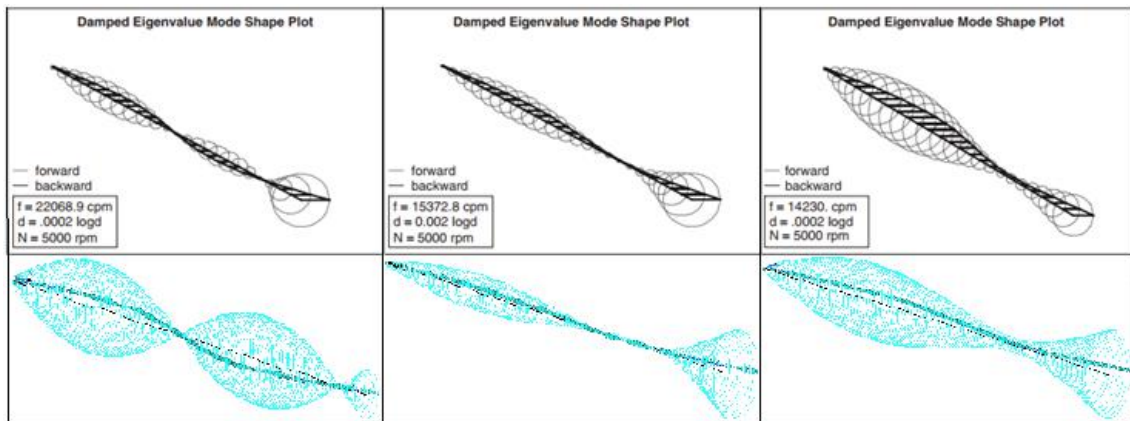


Figura 5.22: Gráfico de órbitas do segundo modo de precessão com mancais rígidos.

Tabela 5.4: Frequências naturais do segundo modo de vibração com mancais rígidos

	6 polegadas			12 polegadas			18 polegadas		
	VANCE	Ansys	diferença	VANCE	Ansys	diferença	VANCE	Ansys	diferença
ω_2 (rpm)	22068,9	22765,2	3,16%	15372,8	17630,4	14,68%	14230,0	14087,4	1,00%

As órbitas do segundo modo de precessão também ficaram bem semelhantes, assim como as suas respectivas frequências naturais associadas, exceto no segundo caso, onde ocorreu uma diferença significativa de 14,68%. Essa divergência pode ser resultante devido às aproximações numéricas e ao amortecimento do eixo.

É notável que os 3 nós modais vão se aproximando conforme se aumenta o comprimento do trecho em balanço. Isto acontece porque os mancais são rígidos e os deslocamentos (raios das órbitas) sobre eles é nulo e vão aumentando com o afastamento longitudinal deles.

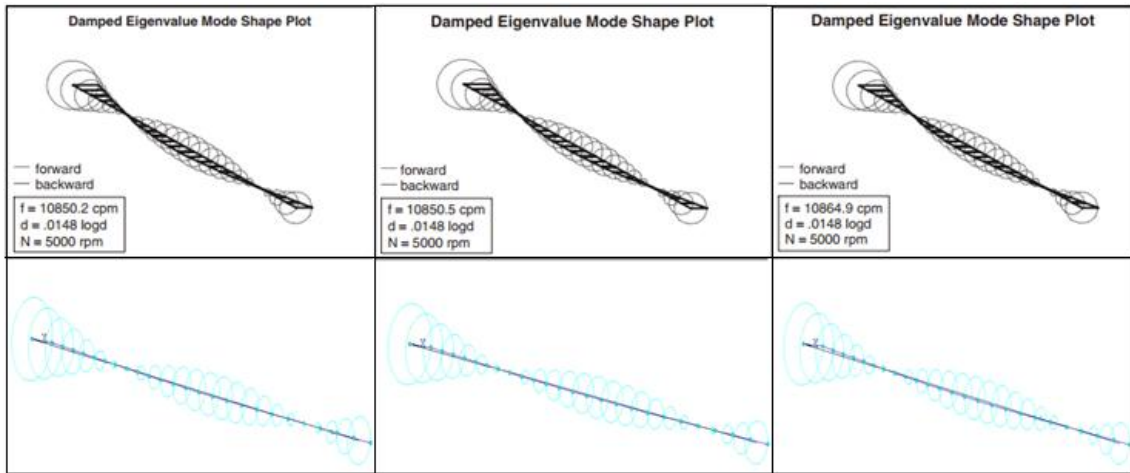


Figura 5.23: Gráfico de órbitas do terceiro modo de precessão com mancais flexíveis.

Tabela 5.5: Frequências naturais do terceiro modo de vibração com mancais flexíveis

	6 polegadas			12 polegadas			18 polegadas		
	VANCE	Ansys	diferença	VANCE	Ansys	diferença	VANCE	Ansys	diferença
ω_3 (rpm)	10850,2	11641,2	7,29%	10850,5	11574,0	6,67%	10864,9	11667,6	7,39%

As órbitas do terceiro modo de precessão com mancais flexíveis ficaram bem semelhantes e a maior diferença na terceira frequência natural foi de 7,39%.

Os mancais da extremidade permitem grandes deslocamentos por serem flexíveis e, para manter a continuidade da linha de eixo, o nó modal que antes era na sobre este mancal, se desloca para frente, mantendo o formato cônico das órbitas.

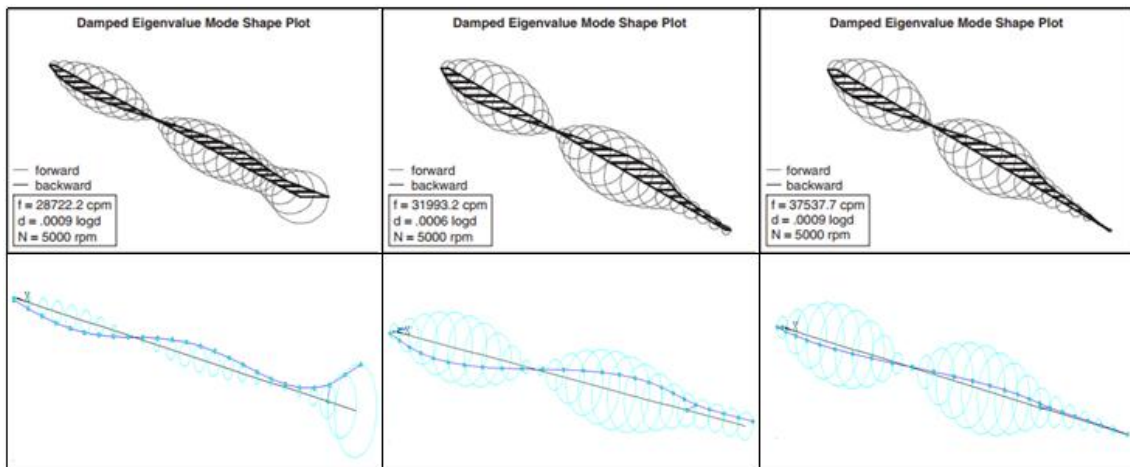


Figura 5.24: Gráfico de órbitas do terceiro modo de precessão com mancais rígidos.

Tabela 5.6: Frequências naturais do terceiro modo de vibração com mancais rígidos

	6 polegadas			12 polegadas			18 polegadas		
	VANCE	Ansys	diferença	VANCE	Ansys	diferença	VANCE	Ansys	diferença
ω_3 (rpm)	28722,2	33804,6	7,69%	31993,2	29629,8	-7,39%	37537,7	34457,4	-8,21%

As órbitas do terceiro modo de precessão com mancais rígidos também se mostraram muito similares, sendo de 8,21% a maior diferença na terceira frequência natural.

5.2.2 A influência dos momentos giroscópicos sobre as frequências naturais

Nesta seção, foram comparados 2 rotores, onde a única diferença é o diâmetro do disco em balanço na extremidade, sendo de 12 polegadas no primeiro e 36 polegadas no segundo, de acordo com a Fig. 5.25.

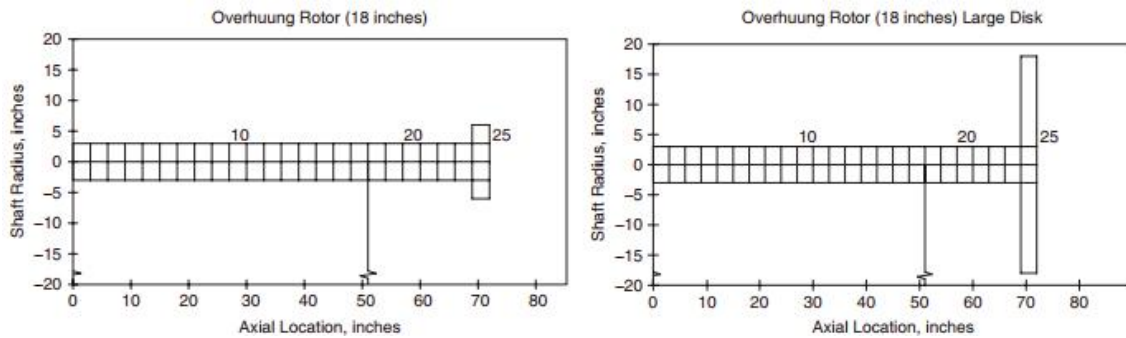


Figura 5.25: Rotores com discos diferentes a 18 polegadas em balanço.

Com a alteração do diâmetro do disco, o aumento de volume do disco também vai contribuir para um acréscimo da massa em balanço, dificultando, portanto, a separação do efeito giroscópico do efeito de inércia do disco.

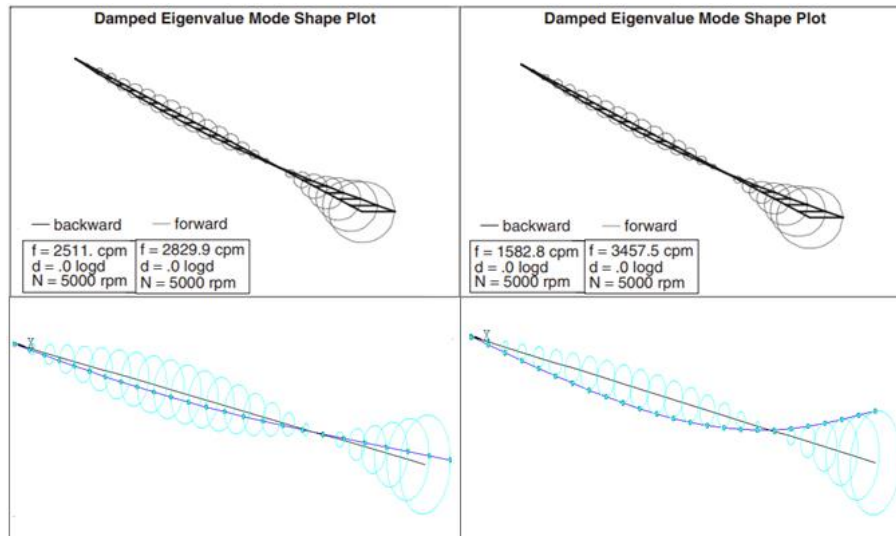


Figura 5.26: *Influência do efeito giroscópico sobre o primeiro modo.*

Pode-se perceber que os gráficos de órbitas para as duas condições de discos diferentes praticamente se mantiveram iguais, demonstrando pouca influência dos acréscimos na inércia e no efeito giroscópico do disco sobre o primeiro modo de precessão direta e de precessão retrógrada.

Tabela 5.7: Frequência natural do primeiro modo retrógrado em $\Omega = 5000 \text{ rpm}$

mancais	diâmetro do disco	VANCE	Ansys	diferença
flexíveis	12 polegadas	2511,0	2697,7	7,4 %
rígidos	36 polegadas	1582,8	1755,2	10,9 %

Tabela 5.8: Frequência natural do primeiro modo direto em $\Omega = 5000 \text{ rpm}$

mancais	diâmetro do disco	VANCE	Ansys	diferença
flexíveis	12 polegadas	2829,9	2717,8	4,0 %
rígidos	36 polegadas	3457,5	4128,8	19,4 %

Na velocidade de $\Omega = 5000 \text{ rpm}$, ao mudar a condição de mancais flexíveis para mancais rígidos, a frequência natural do primeiro modo retrógrado diminuiu na duas formas de resolução, o que mostra que o soma dos efeitos giroscópico e de inércia sobre o disco superaram o aumento na rigidez dos mancais, reduzindo o valor de ω_1 ao invés de aumentar.

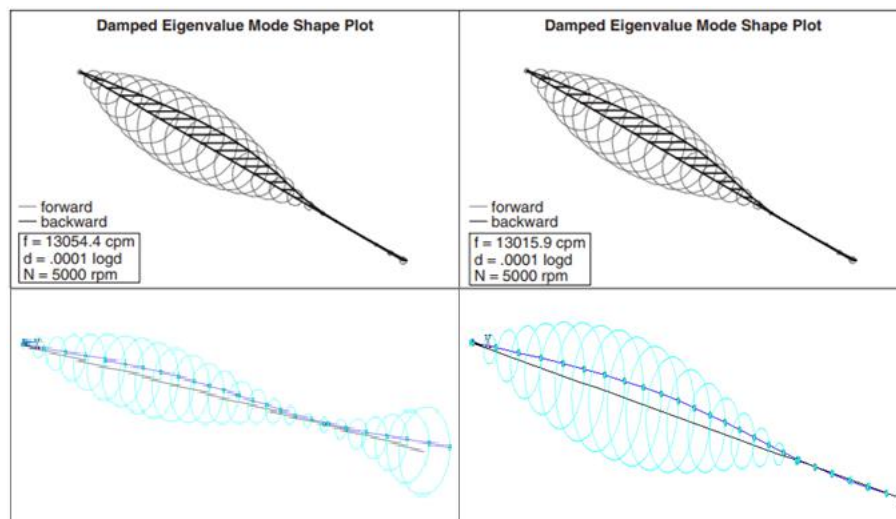


Figura 5.27: *Influência do efeito giroscópico sobre o segundo modo.*

Tabela 5.9: Frequência natural do segundo modo direto em $\Omega = 5000 \text{ rpm}$

mancais	diâmetro do disco	VANCE	Ansys	diferença
rígidos	12 polegadas	13054,4	14251,8	9,2 %
rígidos	36 polegadas	13015,9	12054,0	7,4 %

5.2.3 Mapa de velocidades críticas

O mapa de velocidades críticas é um gráfico muito útil na rotodinâmica, pois ele analisa como as velocidades críticas variam exclusivamente em função das rigidezes dos mancais. Desta forma, é possível estudar alternativas para evitar ou afastar-se das velocidades críticas com base nos coeficientes rigidez diretos dos mancais. É importante esclarecer que estas curvas são idealizadas e assumem as seguintes hipóteses para a sua construção: os mancais devem ser idênticos, isotrópicos, sem amortecimento e os coeficientes de rigidez acoplados são desconsiderados.

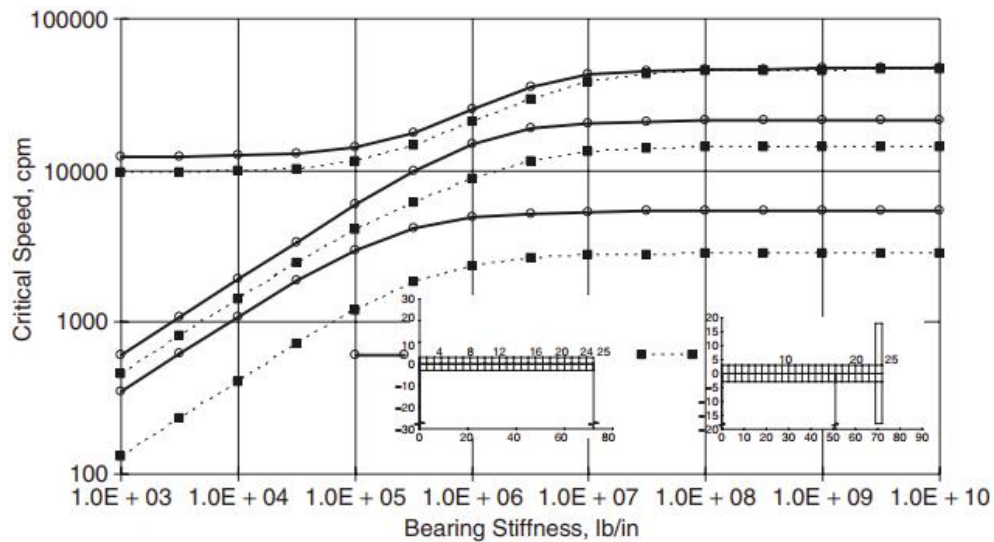


Figura 5.28: *Influência do efeito giroscópico no mapa de velocidades críticas - VANCE et al. (2010).*

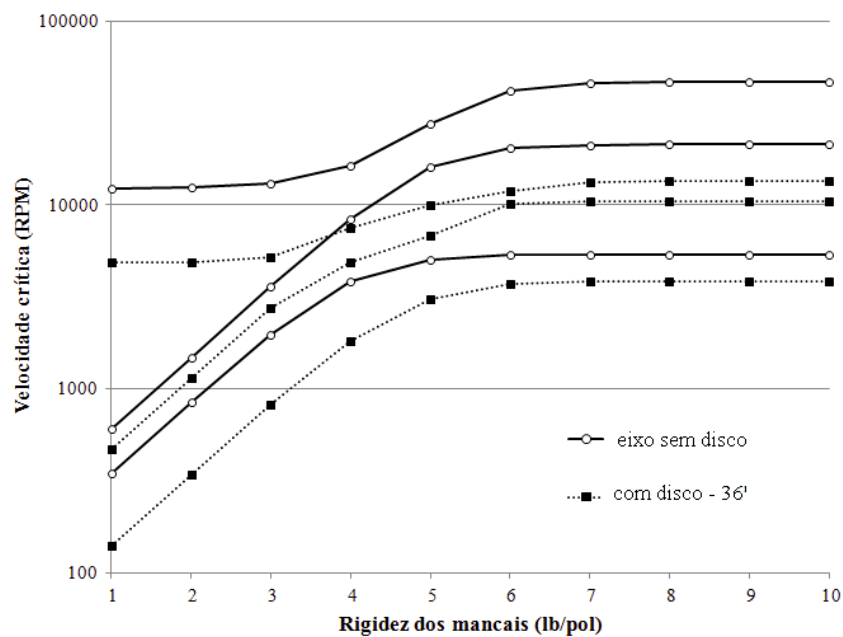


Figura 5.29: *Influência do efeito giroscópico no mapa de velocidades críticas - Ansys.*

Nos gráficos acima, a curva pontilhada se refere ao rotor com uma massa expressiva em balanço, enquanto a curva cheia se refere ao mesmo rotor mas sem a massa em balanço e com os mancais nas extremidades do eixo. A distância entre os mancais no rotor sem o disco é maior, o que torna o eixo mais flexível, reduzindo com isso as suas frequências naturais das velocidades críticas. Apesar disso, a influência da massa em balanço no outro rotor é tão grande que

supera o efeito da flexibilidade, diminuindo ainda mais as três primeiras velocidades críticas do que no rotor, conforme pode-se visualizar nas figuras 5.28 e 5.29.

Para avaliar os efeitos giroscópicos de forma isolada, sem a influência da massa do disco em balanço, além do MVC não amortecido para o rotor com um disco de 36 polegadas em balanço, será superposto a este gráfico o MVC não amortecido para o mesmo rotor com um disco de 12 polegadas em balanço, porém com uma massa equivalente ao disco de 36 polegadas. Para isso, a massa específica do material do disco menor será aumentada, gerando 2 discos com massas iguais, apesar dos volumes diferentes.

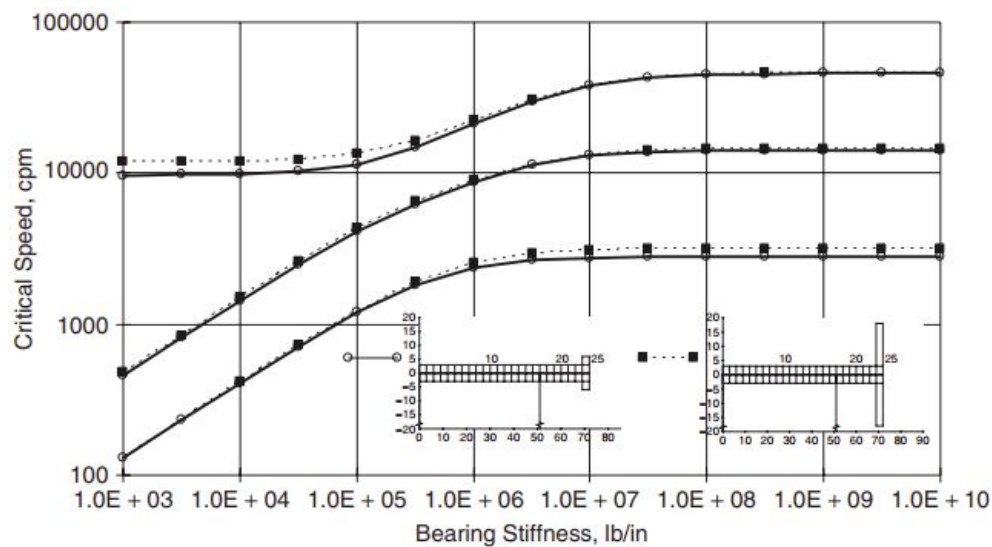


Figura 5.30: *Influência do efeito giroscópico no MVC sem o efeito da massa em balanço - VANCE et al. (2010).*

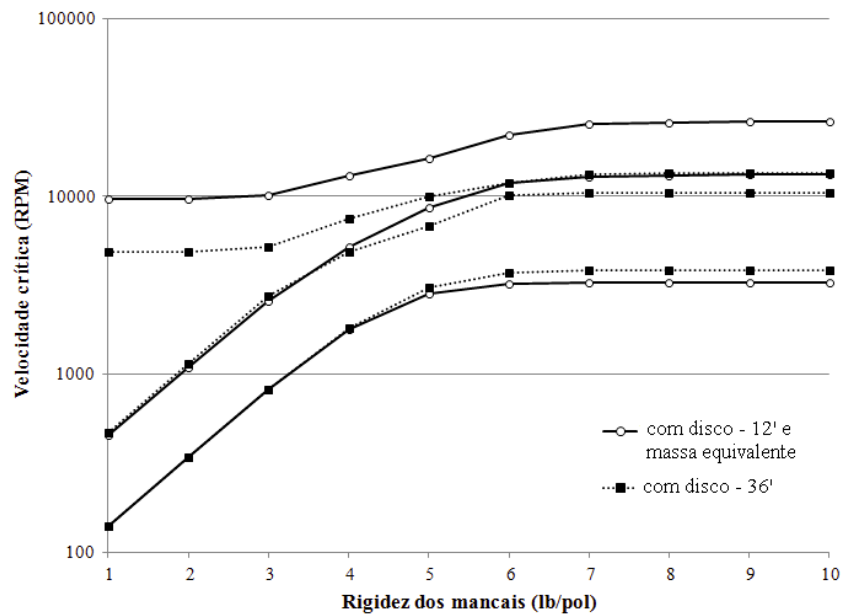


Figura 5.31: *Influência do efeito giroscópico no MVC sem o efeito da massa em balanço - Ansys.*

As velocidades críticas correspondentes ao disco de 12 polegadas estão indicadas pelas linhas cheias nas figuras 6.32 e 6.33. Não há diferença para o primeiro modo na faixa de mancais flexíveis (metade esquerda da figura), porque, nesta faixa, o modo é dominado pelo movimento nos mancais e não há deflexões no eixo. O eixo se move como um corpo rígido (movimento de translação) e não existe um momento enrijecedor significativo gerado pela massa em balanço. Na faixa de maior rigidez dos mancais (a metade direita do MVC não amortecido), existem deflexões significativas no eixo e os efeitos giroscópicos são maiores para o disco de 36 polegadas, resultando em uma velocidade crítica mais alta.

Na curva da segunda velocidade crítica na região mais flexível dos mancais, pode-se notar uma tendência em aumentar ligeiramente a rigidez com o disco de 36 polegadas e, assim, resulta em uma velocidade crítica ligeiramente maior. Na região de maior rigidez dos mancais, o modo faz com que os discos fiquem muito próximos de um nó e, portanto, não há diferença nas velocidades críticas. As mesmas características observadas para o segundo modo também se aplicam ao terceiro modo.

Os efeitos giroscópicos, embora pareçam ser menores no MVC não amortecido (escala logarítmica), geralmente são muito grandes e não podem ser ignorados. Os rotores em balanço geralmente tendem a dificultar a análise das previsões das velocidades críticas e da estabilidade.

Capítulo 6

Estudo de Casos

Nesta capítulo, a metodologia proposta foi utilizada para analisar as vibrações laterais de linhas de eixo de 2 tipos diferentes de embarcação.

6.1 Linha de eixo de um navio AHTS

Os procedimentos de análise foram aplicados em um navio do tipo AHTS (*Anchor Handling Tug Supply*) que estava realmente tendo problemas com vibrações excessivas que estavam ocorrendo em sua linha de eixo. Em CATERPILLAR (2017), o relatório que serviu como referência, se encontram os dados físicos do sistema propulsor da embarcação, juntamente com um estudo de vibrações laterais nas condições de projeto.

Algumas características do sistema propulsor utilizado estão na Tabela 6.1:

Tabela 6.1: Dados do propulsor

diâmetro do hélice	4.300 mm
número de pás	4
empuxo no hélice	549 kN
massa do hélice	10.208 kg
potência do motor	6000 kW
rotação máxima	125 rpm

A geometria do eixo era totalmente conhecida, então foi possível produzir um modelo numérico com massa consistente, onde os efeitos de inércia são precisamente aplicados. A geometria do hélice não foi modelada, entretanto, foram representados através de ferramentas computacionais a massa do propulsor, os seus momentos de inércia e a sua massa adicional.

Os 7 mancais hidrostáticos foram considerados como isotrópicos e suas rigidezes laterais foram estimadas por CATERPILLAR (2017) e se encontram na Tabela 6.2, juntamente com as respectivas posições longitudinais de cada um.

Tabela 6.2: Informações sobre os mancais

mancal	posição (mm)	rigidez (N/m)
tubo telescópico (ré - 1)	2.187,0	$4,5 \times 10^8$
tubo telescópico (ré - 2)	2.997,0	$4,5 \times 10^8$
tubo telescópico (vante)	10.875,0	$4,5 \times 10^8$
intermediário (ré)	18.278,0	$4,3 \times 10^8$
intermediário (vante)	26.707,0	$4,3 \times 10^8$
caixa redutora (ré)	35.310,0	$4,0 \times 10^8$
caixa redutora (vante)	36.083,0	$4,0 \times 10^8$

A geometria do eixo propulsor foi construída utilizando 135 pontos e 13 tipos de seções transversais. A malha computacional (Fig. 6.1) padrão ficou com 269 nós e 134 elementos cilíndricos, sendo de 12 *mm* o comprimento do menor elemento finito.

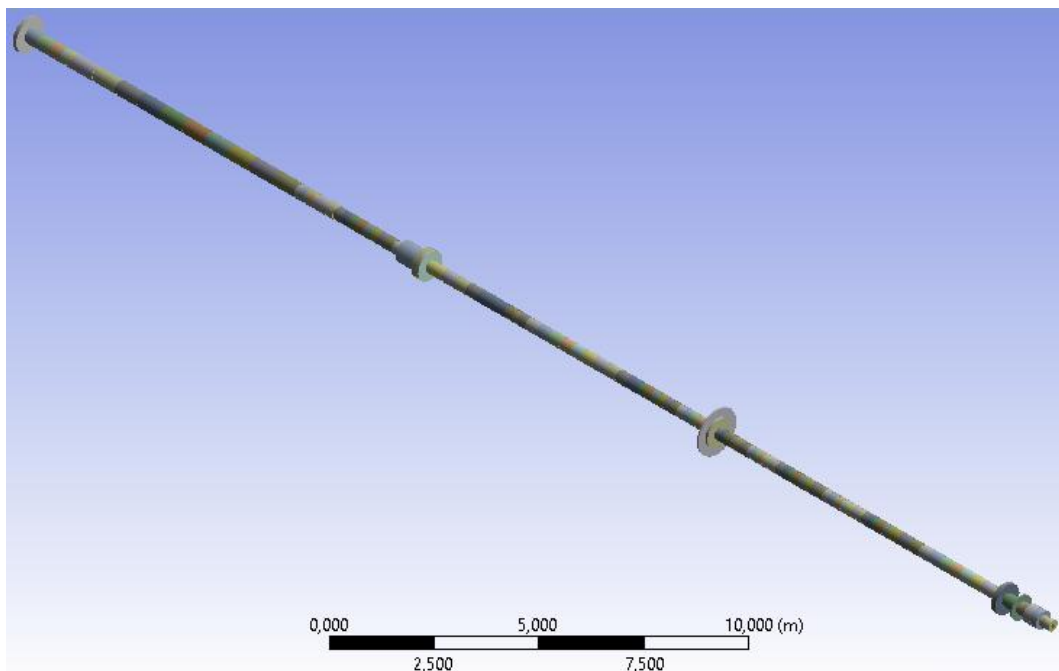


Figura 6.1: *Modelo geométrico da linha de eixo de um navio AHTS.*

Essa linha de eixo tem um comprimento aproximado de 36,00 metros, um volume de 3,66 metros cúbicos, uma massa de 28,71 toneladas e está apoiada sobre 7 mancais, os quais foram caracterizados por molas transversais ideais no modelo. A

geometria do hélice não é conhecida mas ela foi representada por uma massa pontual, cujo valor se encontra na Tabela 6.1, e os seus momentos de inércia de massa, que foram estimados em $I_x = I_y = 1700 \text{ kg.m}^2$ e $J = 3400 \text{ kg.m}^2$.

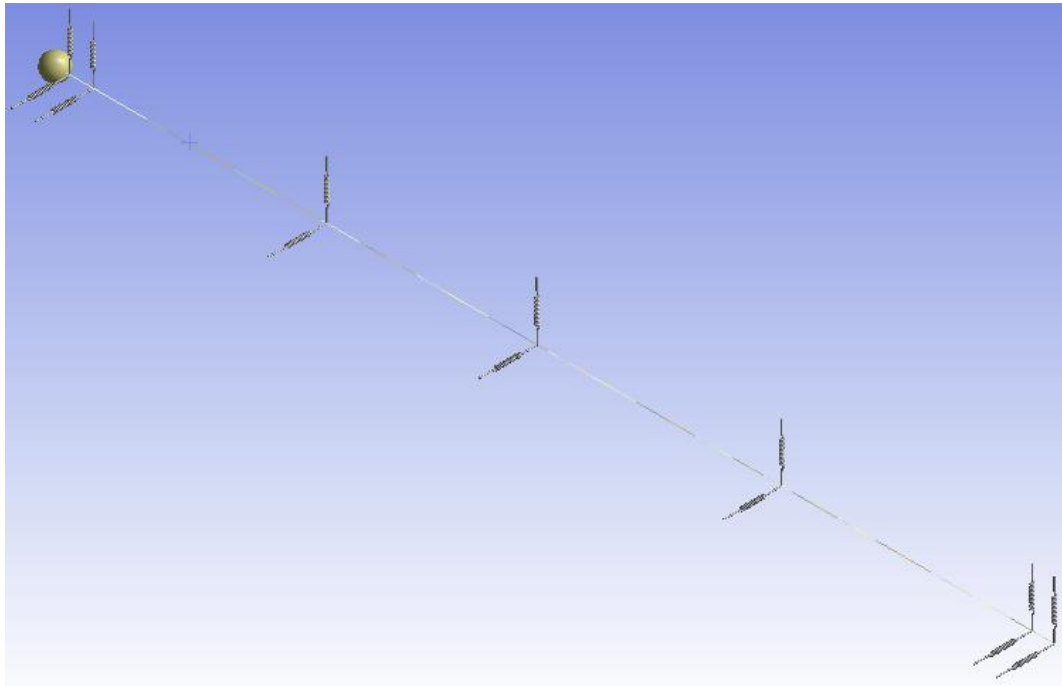


Figura 6.2: *Modelo da linha de eixo do AHTS Bossa Nova.*

6.1.1 Comparação de frequências naturais e formas modais

As 3 primeiras frequências naturais calculadas por CATERPILLAR (2017) e pelo programa de elementos finitos na velocidade de rotação $\Omega = 125 \text{ rpm}$ se encontram na Tabela 6.3.

Tabela 6.3: Frequências naturais dos 3 primeiros modos diretos e retrógrados (rpm)

forma modal	Precensão direta			Precensão retrógrada		
	CATERPILLAR (2017)	Ansys	diferença	CATERPILLAR (2017)	Ansys	diferença
1	647,9	664,1	2,50 %	625,3	663,6	6,13 %
2	700,6	784,4	11,96 %	688,7	779,3	13,15 %
3	915,8	942,9	2,96 %	903,6	940,5	4,08 %

Em seguida, foram comparadas as formas modais planificadas. Pelo fato de os mancais serem isotrópicos, as curvas nos eixos Y e Z ficaram iguais para cada modo, não havendo necessidade de se mostrar as duas, portanto.

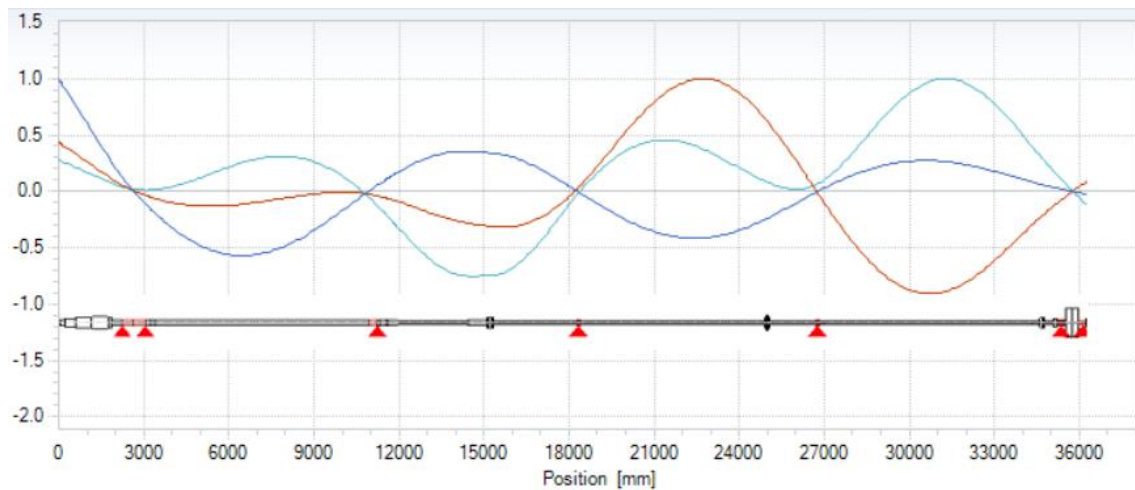


Figura 6.3: 3 primeiros modos de precessão retrógrada - CATERPILLAR (2017).

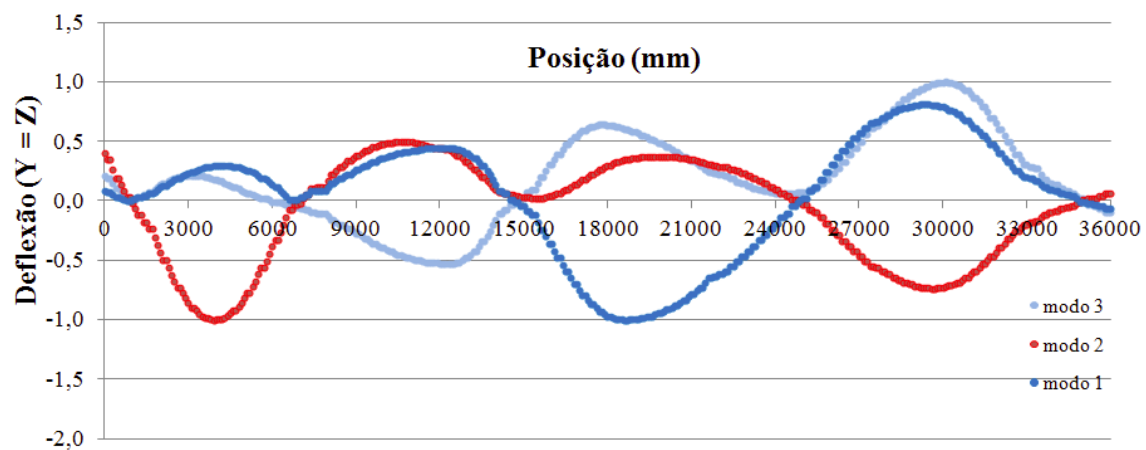


Figura 6.4: 3 primeiros modos de precessão retrógrada (Ansys).

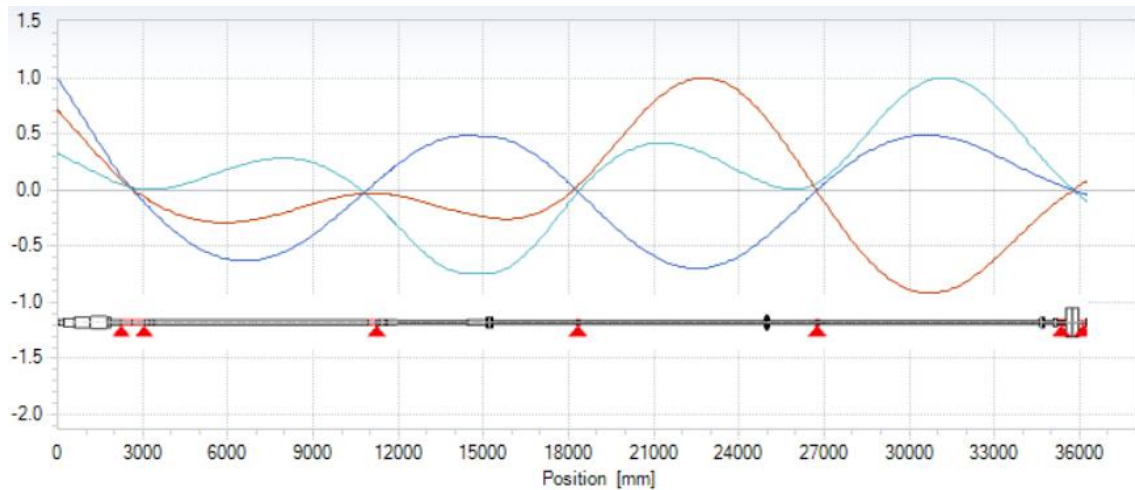


Figura 6.5: 3 primeiros modos de precessão direta - CATERPILLAR (2017).

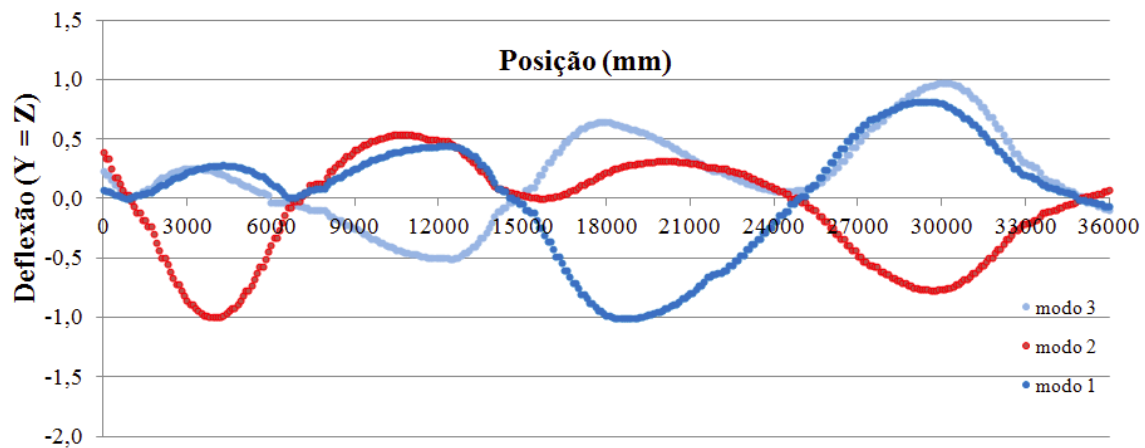


Figura 6.6: 3 primeiros modos de precessão direta (Ansys).

6.1.2 Gráfico de órbitas

Também foram obtidos pelo programa os diagramas de órbitas dos 3 primeiros modos para a velocidade máxima do eixo $\Omega = 125 \text{ rpm}$ e pode-se observar nas figuras 6.7, 6.8 e 6.9 que as órbitas ficaram circulares em virtude de os coeficientes de rigidez dos mancais serem iguais nas direções Y e Z .

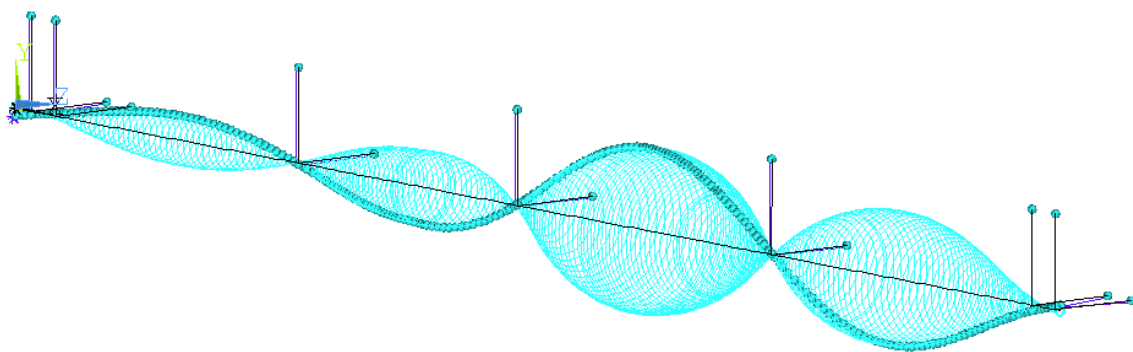


Figura 6.7: *Diagrama de órbitas - modo 1.*

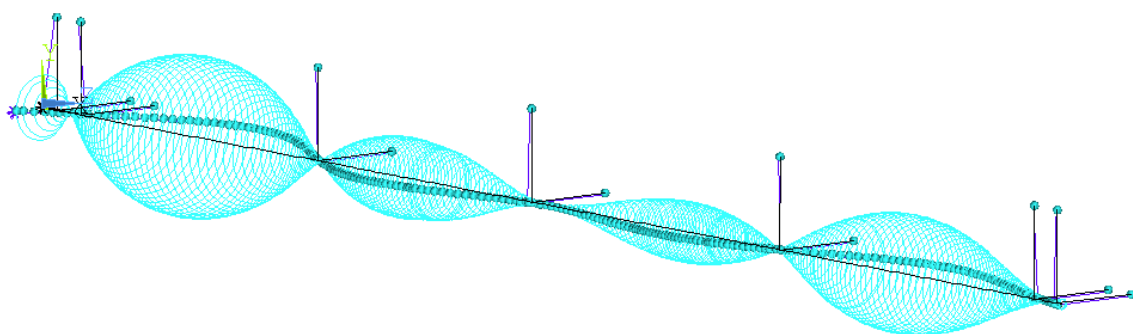


Figura 6.8: *Diagrama de órbitas - modo 2.*

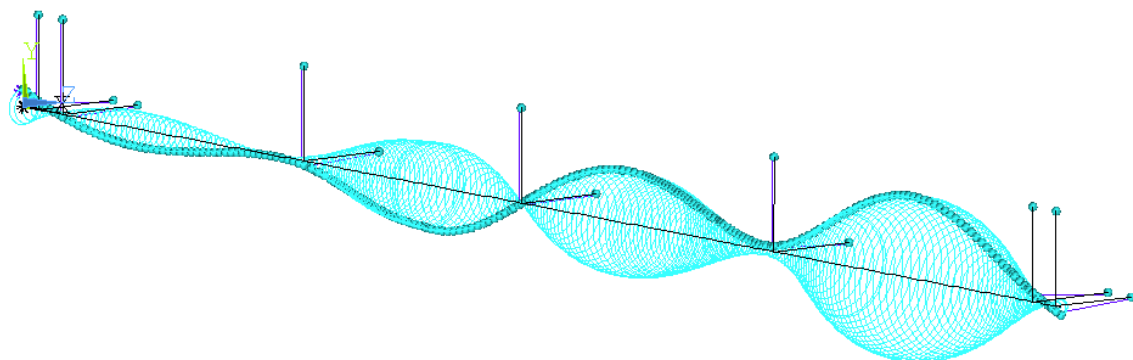


Figura 6.9: *Diagrama de órbitas - modo 3.*

6.1.3 Gráfico de Campbell

Como o hélice tem 4 pás, CATERPILLAR (2017) também estimou as velocidades críticas para $h = 4$, além das obtidas para $h = 1$. Baseado nisso, foram construídos 2 gráficos de *Campbell*, com excitações síncronas para os valores de h acima, conforme pode-se visualizar nas figuras 6.10 e 6.11.

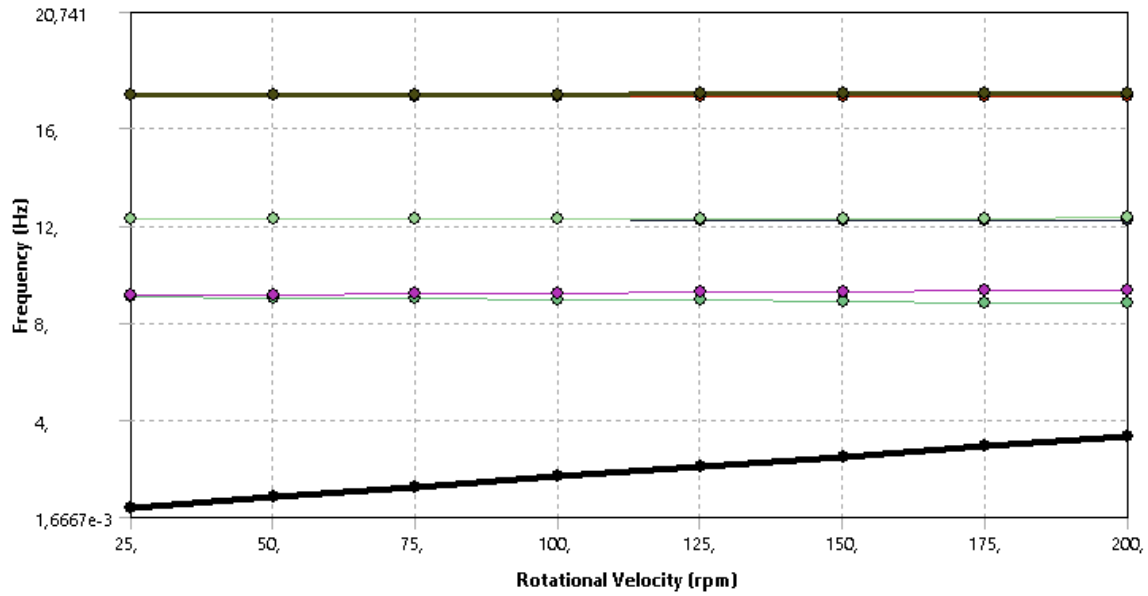


Figura 6.10: *Diagrama de Campbell* ($h = 1$).

Pode-se observar que a reta $y = x$ não intercepta nenhuma frequência natural até a velocidade de 200 *rpm* e, portanto, para uma condição de excitação síncrona, não existe nenhuma velocidade crítica nesta faixa de velocidades de rotação do eixo.

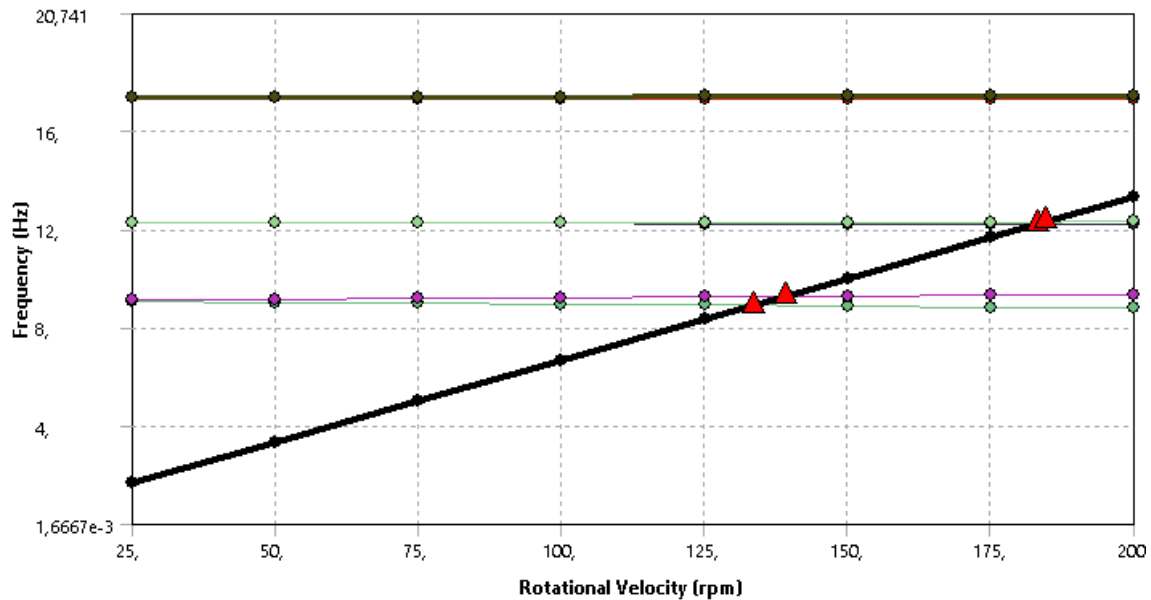


Figura 6.11: *Diagrama de Campbell* ($h = 4$).

Já neste caso, a reta $y = 4x$ faz cruzamentos, obtendo-se 4 velocidades críticas. A primeira, em 133,4 *rpm*, que intercepta a primeira frequência natural de precessão retrógrada, a segunda em 139,0 *rpm*, cruzando a primeira frequência

natural de precessão direta, a terceira e a quarta ficaram bem próximas, em 183,3 *rpm* e 184,4 *rpm*, respectivamente, pois a segunda frequência natural praticamente não sofreu alteração.

No final do relatório, CATERPILLAR (2017) concluiu que, quando o eixo está girando na sua velocidade máxima, ele fica a 20% da velocidade crítica mais próxima, não ocorrendo nenhum dano ao sistema. O resultado da análise por MEF ficou de acordo que a primeira velocidade crítica é superior a 125 *rpm*, porém ela foi estimada em 133,4 *rpm* ao invés de 150 *rpm*, gerando uma margem de apenas 6,7%.

6.1.4 Diagrama de Bode

Baseado na formulação de (API, 2005) (Equação 5.1), tem-se para esta linha de eixo: $W = 38.922 \text{ kg}$ e $N = 125 \text{ rpm}$, logo $U = 1.977.237,6 \text{ g.mm}$. Dessa forma, os parâmetros adotados para simular o desbalanceamento foram $u = 7.908.950,4 \text{ g.mm}$ e $A_1 = 248,9 \text{ }\mu\text{m}$.

Para este caso, o desbalanceamento foi aplicado próximo à extremidade do hélice e a massa desbalanceadora ficou com uma excentricidade de 2.000 *mm*. Entretanto, foi selecionado o mancal mais próximo do hélice para avaliar a resposta neste ponto. Então, obteve-se uma massa desbalanceadora $m_u = 3,95 \text{ kg}$ e, desta forma, o módulo da força de desbalanceamento para esta velocidade de rotação foi estimado em $|\vec{F}_u| = 1.355,2 \text{ N}$.

A Figura 6.12 mostra o espectro da amplitude de resposta devido ao desbalanceamento.

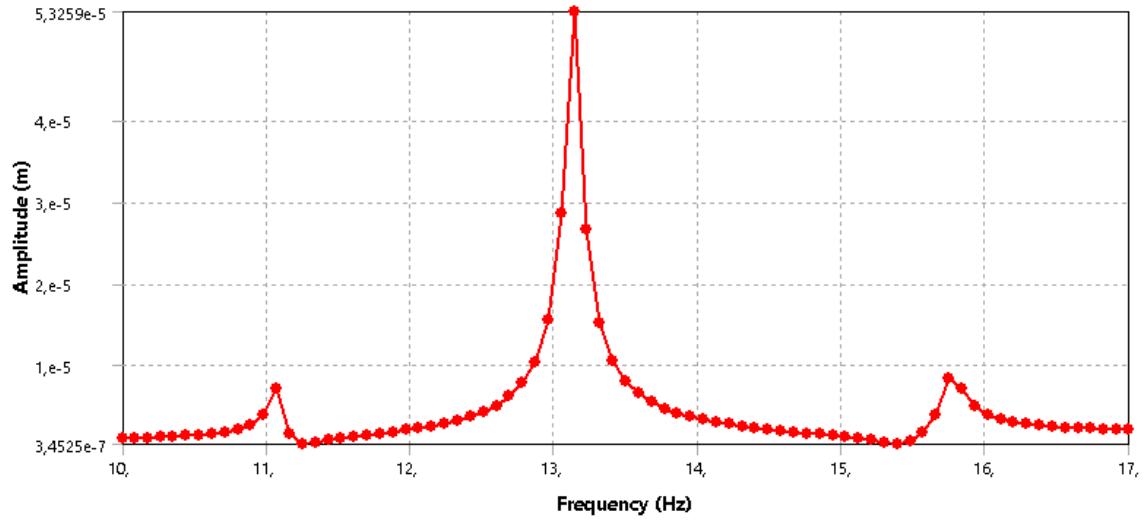


Figura 6.12: *Amplitude de resposta X Frequência.*

Foram utilizados 100 pontos para essa simulação em uma faixa de 9 a 18 Hz e o maior pico, no valor de $53,3 \mu.m$, aconteceu na ressonância com a segunda frequência natural $\omega_2 = 13,14 \text{ Hertz}$, porém ficou abaixo do limite aceitável A_1 .

A Figura 6.13 mostra a fase da resposta devido ao desbalanceamento.

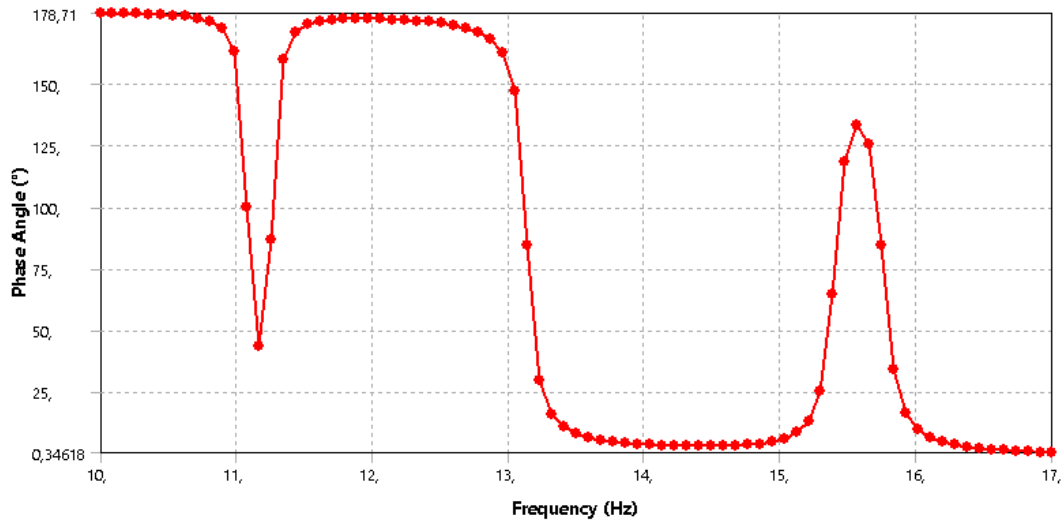


Figura 6.13: *Fase X Frequência.*

No gráfico de fases, em virtude do amortecimento, ocorre um defasagem de 180° sempre que a frequência de excitação se sobrepõe à qualquer frequência natural.

6.2 Linha de eixo de um navio militar

Agora os procedimentos de análise serão aplicados em um projeto de sistema propulsor para um navio de guerra, do tipo Corveta, que terá 2 linhas de eixo, sistema com hélice de passo variável e propulsão tipo CODAD (*Combined Diesel and Diesel*). A configuração de projeto do eixo propulsor pode ser vista na Fig. 6.14 e as suas principais propriedades encontram-se na Tabela 6.4.

Tabela 6.4: Características do eixo propulsor

potência máxima transmitida	11.840 <i>kW</i>
velocidade máxima do eixo	250 <i>rpm</i>
material do eixo	liga de aço forjado - 36CrNiMo4
comprimento do eixo	36,63 <i>metros</i>
seção transversal tubular	$D_{int} = 140 \text{ mm}$ e ($D_{ext} = 390 \text{ mm}$ ou 340 mm)
inclinação do eixo	3 <i>graus</i>
massa do eixo	28,10 <i>toneladas</i>
massa do hélice	8,95 <i>toneladas</i>
mancais hidrodinâmicos	7, sendo de 4 tipos diferentes

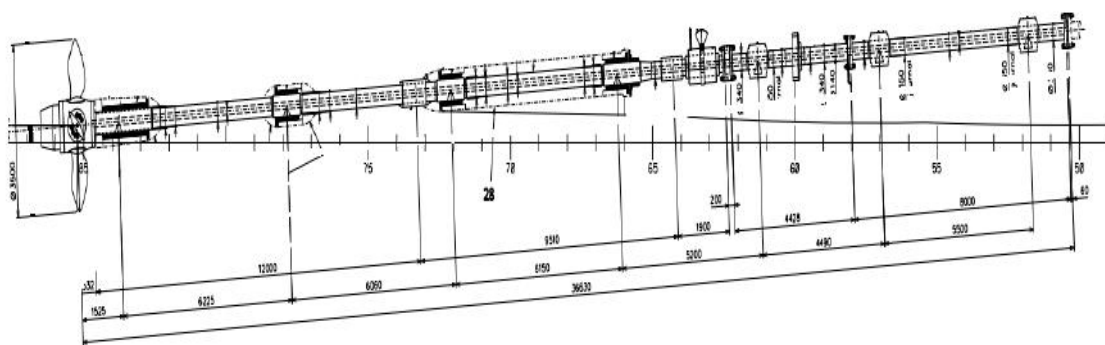


Figura 6.14: Projeto do eixo propulsor.

6.2.1 Elementos da linha de eixo

A linha de eixo tem um comprimento de aproximadamente 37,0 metros e conta com 7 mancais de deslizamento, sendo de 4 tipos de diferentes: 2 mancais nos

pés de galinha, 2 mancais no tubo telescópico e 3 mancais hidrostáticos iguais. Eles foram considerados isotrópicos e as suas rigidezes adotadas, juntamente com as propriedades dos outros 5 elementos rotativos podem ser visualizadas na Tabela 6.5.

Tabela 6.5: Elementos fundamentais da linha de eixo

posição (mm)	mancal	rigidez (N/m)	elemento	massa (kg)	momento polar (kg.m ²)
0,0			propulsor	8950,0	3458,0
1525,0	suporte principal	$2,11 \times 10^8$			
7750,0	suporte intermediário	$2,09 \times 10^8$			
12532,0			acoplamento de ré	640,0	258,0
13810,0	tubo telescópico de ré	$2,09 \times 10^8$			
19960,0	tubo telescópico de vante	$2,09 \times 10^8$			
22042,0			acoplamento de vante	480,0	138,0
24042,0			flange da caixa de óleo	170,0	110,0
25160,0	mancal hidrostático	$1,0 \times 10^9$			
28570,0			flange intermediário	140,0	149,0
29650,0	mancal hidrostático	$1,0 \times 10^9$			
35150,0	mancal hidrostático	$1,0 \times 10^9$			
36570,0			flange da redutora	150,0	66,0

Além disso, a massa adicional do propulsor, cujos momentos de inércia de massa foram fornecidos no projeto ($I_X = 1633,0 \text{ kg.m}^2$ e $I_Y = I_Z = 816,5 \text{ kg.m}^2$), foi estimada em $3.668,4 \text{ kg}$, através de formulações apresentadas em KOROTKIN (2008).

6.2.2 Modelo Numérico

A geometria foi reproduzida por 23 pontos, 22 linhas de corpo e 2 tipos de seção transversal tubular. Depois, foram inseridas nas 22 estações as geometrias de cada seção transversal e selecionada a massa específica do material do eixo, ficando bem definido o corpo sólido cujo comportamento dinâmico será analisado.

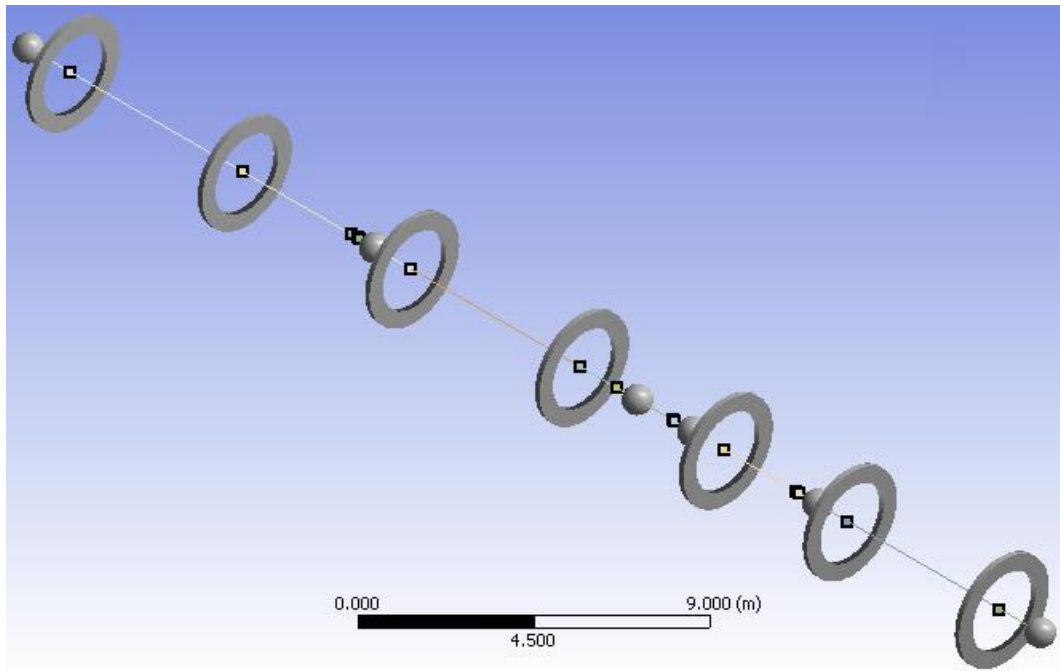


Figura 6.15: *Modelo de mancais, flanges e acoplamentos.*

Na geração da malha cilíndrica (Figura 6.16), foi definido em 200 *mm* o comprimento padrão de cada elemento e o eixo foi discretizado com 389 nós e 194 elementos finitos, sendo que ela foi mais refinada nas regiões dos mancais, onde se quer uma precisão maior nos resultados.

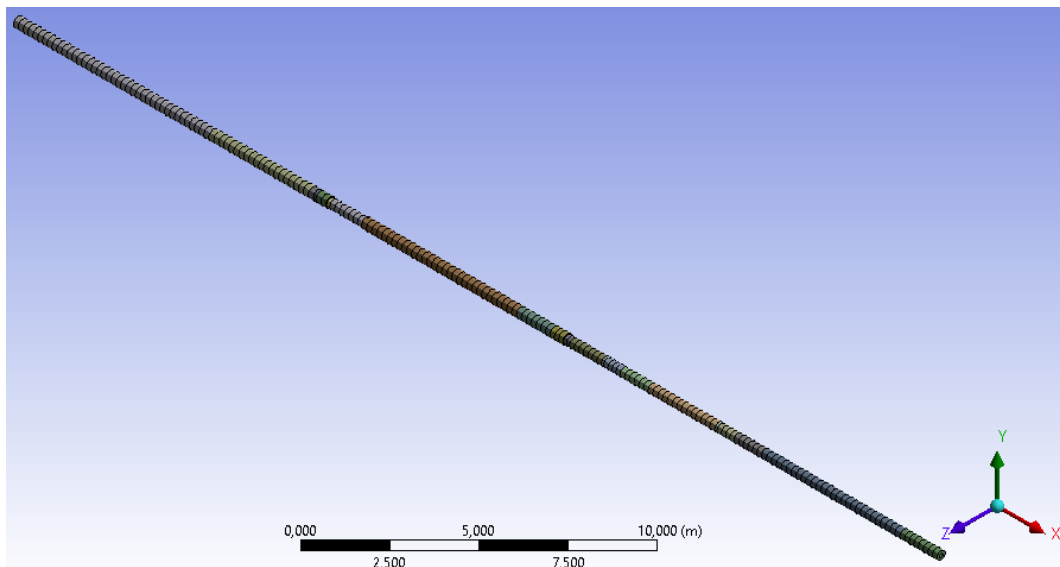


Figura 6.16: *Malha do modelo.*

6.2.3 Resultados

Após inserir as propriedades físicas do modelo, sendo adicionados os coeficientes dinâmicos dos mancais, a massa, a massa adicional, os momentos de inércia do hélice e os momentos de inércia. Foi assumido um modelo de amortecimento proporcional para os mancais, onde os coeficientes diretos de amortecimento foram calculados como sendo 0,1% dos respectivos coeficientes de rigidez em cada mancal.

Em seguida, foram estabelecidas as condições de contorno do sistema e finalmente o modelo foi resolvido até a velocidades de 500 *rpm*, com incrementos de 100 *rpm*, a partir do eixo sem rotação. Foram obtidas as frequências naturais sem e com amortecimento, as formas modais associadas, as taxas de amortecimento, além do Diagrama de Campbell e o gráfico de órbitas elípticas.

A Marinha do Brasil utilizou o *software* Nauticus para realizar a análise de vibrações da linha de eixo do projeto.

Tabela 6.6: Frequências naturais de vibração lateral quando $\Omega = 250$ *rpm*.

modo (n)	tipo de vibração	ω_n (hz) - Nauticus	ω_n (hz) - Ansys	diferença
1	precessão retrógrada	8,40	8,09	3,69 %
	precessão direta	8,60	8,81	-2,44 %
2	precessão retrógrada	23,67	22,56	4,69 %

As primeiras frequências naturais ficaram próximas, entretanto, acredita-se que a diferença de quase 8% para a primeira frequência de precessão retrógrada tenha sido pelo fato de não se conhecer a geometria do eixo com um alto grau de detalhamento, o que pode ter inserido uma margem de erro na precisão das matrizes de massa e rigidez.

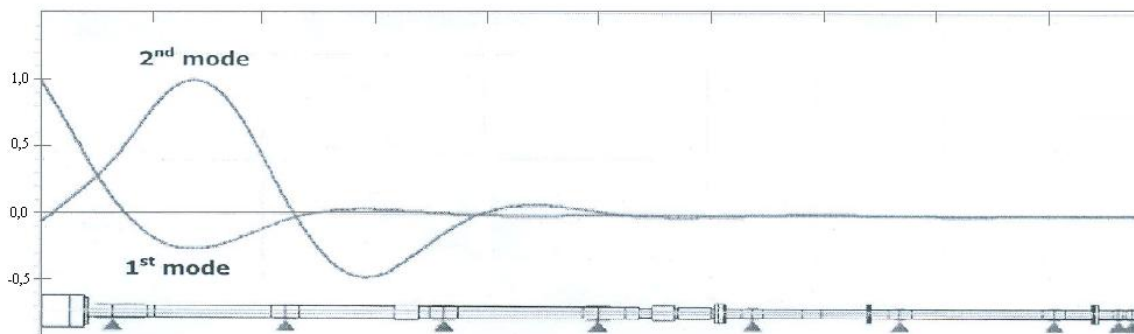


Figura 6.17: Modos de flexão lateral - Nauticus.

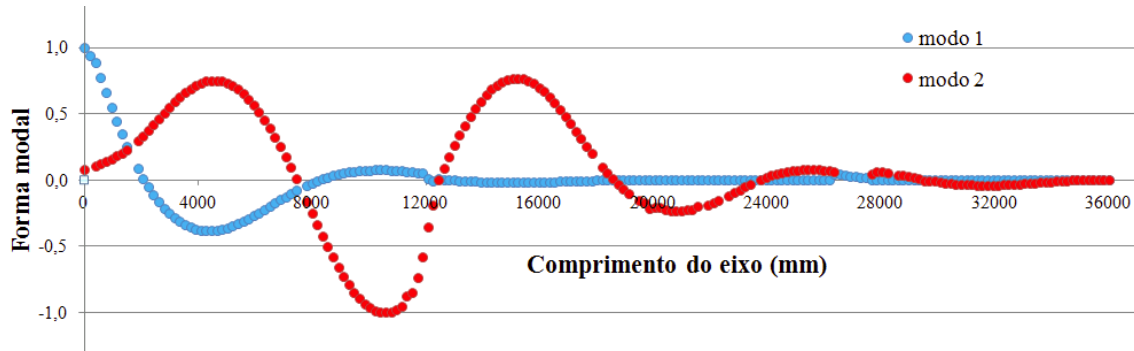


Figura 6.18: *Modos de flexão lateral - ANSYS.*

As figuras 6.17 e 6.18 mostram as projeções dos 2 primeiros modos de órbitas no plano YZ calculadas pelos programas Nauticus e Ansys, respectivamente. Os gráficos da primeira forma modal ficaram bem próximos, sendo de $-0,25$ e $-0,39$ os valores mínimos em cada curva, o ponto onde houve a maior diferença entre os 2 gráficos. Contudo, os gráficos do segundo modo destoaram um pouco mais, apresentando os seguintes valores em cada curva: primeiro pico ($1,0$ e $0,75$), primeiro vale ($-0,5$ e $-1,0$), segundo pico ($0,1$ e $0,77$), segundo vale (cerca de $-0,02$ e $-0,23$), terceiro pico (aproximadamente 0 e $0,08$).

6.2.4 Gráfico de órbitas

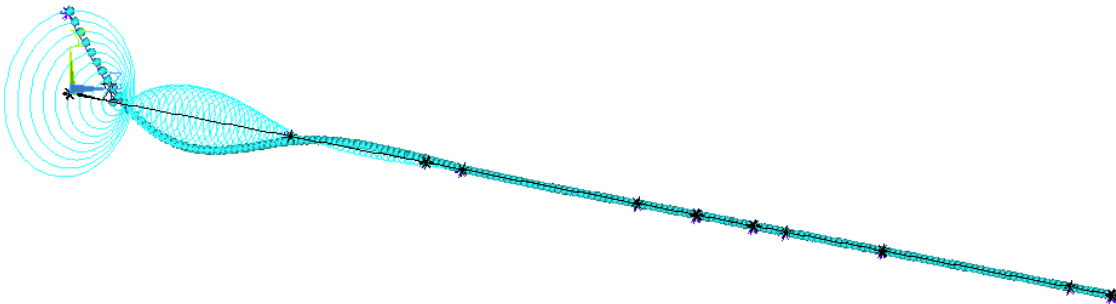


Figura 6.19: *Gráfico de órbitas do primeiro modo de precessão.*

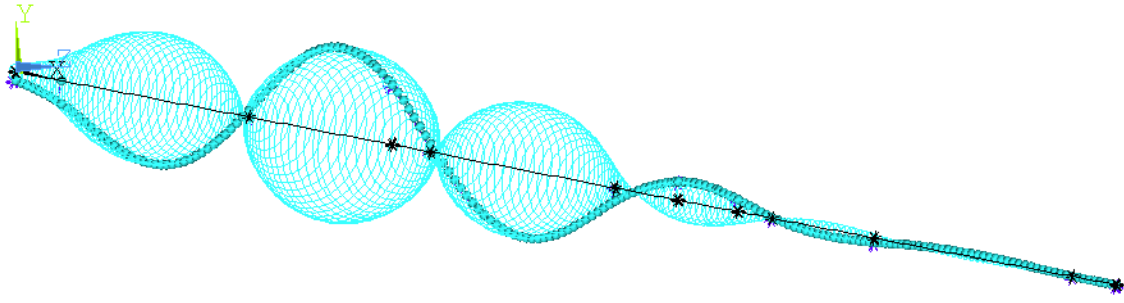


Figura 6.20: *Gráfico de órbitas do segundo modo de precessão.*

Um dos pontos mais importantes do diagrama de órbitas é a possibilidade de avaliar os raios das órbitas da linha elástica do eixo nas posições dos mancais radiais, onde o eixo propulsor se desloca, deslizando na sua região interna.

6.2.5 Diagrama de Campbell

Para a razão $h = 1$, a única velocidade crítica encontrada até a velocidade $\Omega = 500$ rpm foi 467,9 rpm, de acordo com a Fig. 6.21.

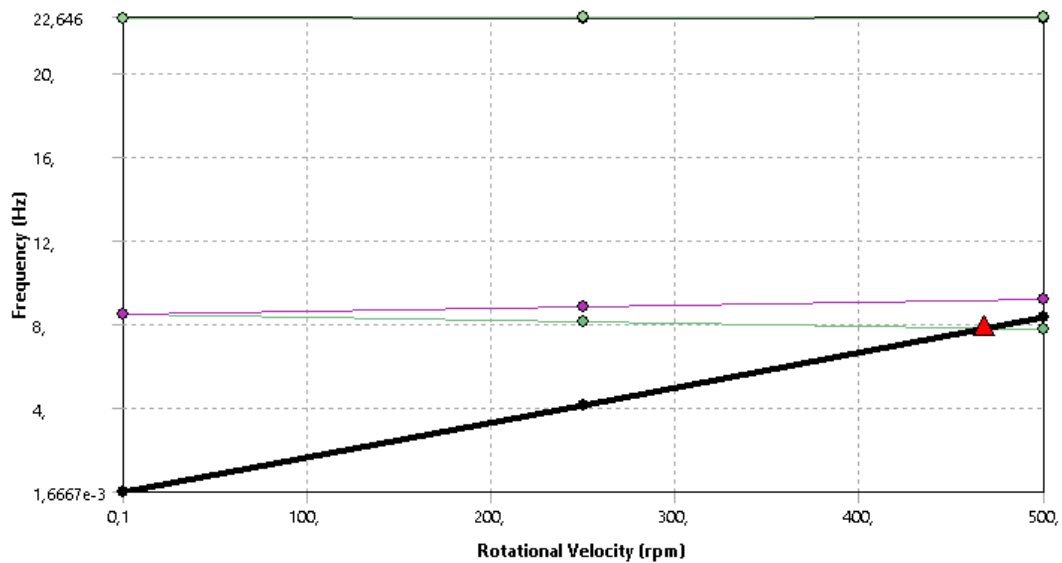


Figura 6.21: *Gráfico de Campbell ($h=1$).*

Como o hélice tem 4 pás, também foi construído o gráfico para uma razão $h = 4$, onde as velocidades críticas obtidas foram 124,1 rpm, 129,5 rpm, 338,3 rpm e 339,4 rpm, conforme a Fig. 6.22.

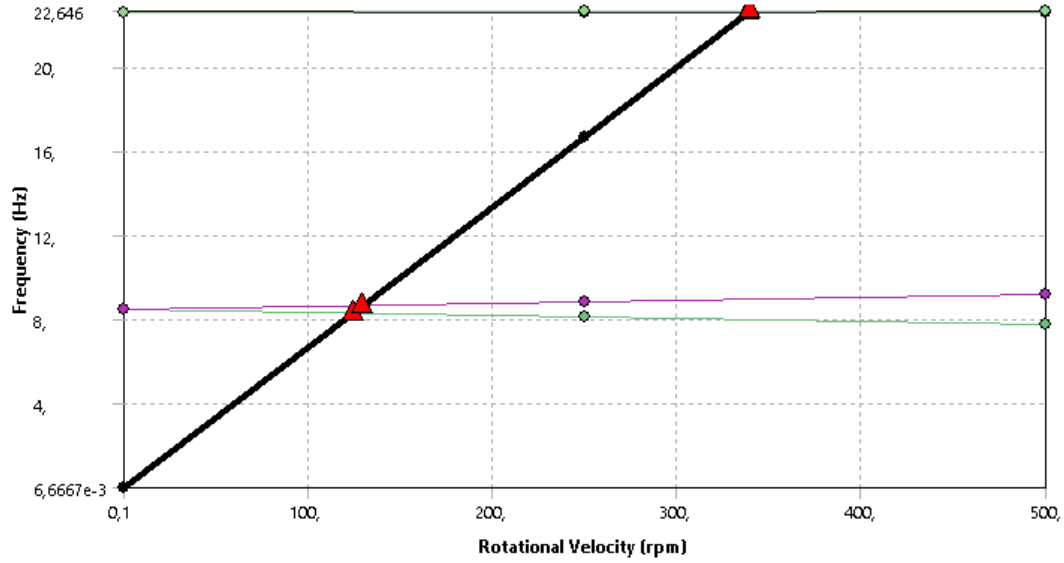


Figura 6.22: *Gráfico de Campbell ($h=4$).*

6.2.6 Diagrama de Bode

De acordo com (API, 2005) (Equação 5.1), os valores de referência para essa linha são: $W = 37.050 \text{ kg}$ e $N = 250 \text{ rpm}$, logo $U = 941.070 \text{ g.mm}$. Dessa forma, os parâmetros adotados para simular o desbalanceamento foram $u = 3.764.280 \text{ g.mm}$ e $A_1 = 176 \text{ }\mu\text{m}$.

Foi escolhida a posição do primeiro mancal para excitar com desbalanceamento. Foi considerada uma excentricidade de $r = 150 \text{ mm}$, obteve-se uma massa desbalanceadora $m_u = 25.095,2 \text{ g}$ e o módulo da força de desbalanceamento para esta velocidade de rotação ficou definido em $|\vec{F}_u| = 2.580 \text{ N}$.

A Figura 6.23 mostra o espectro da amplitude de resposta devido ao desbalanceamento.

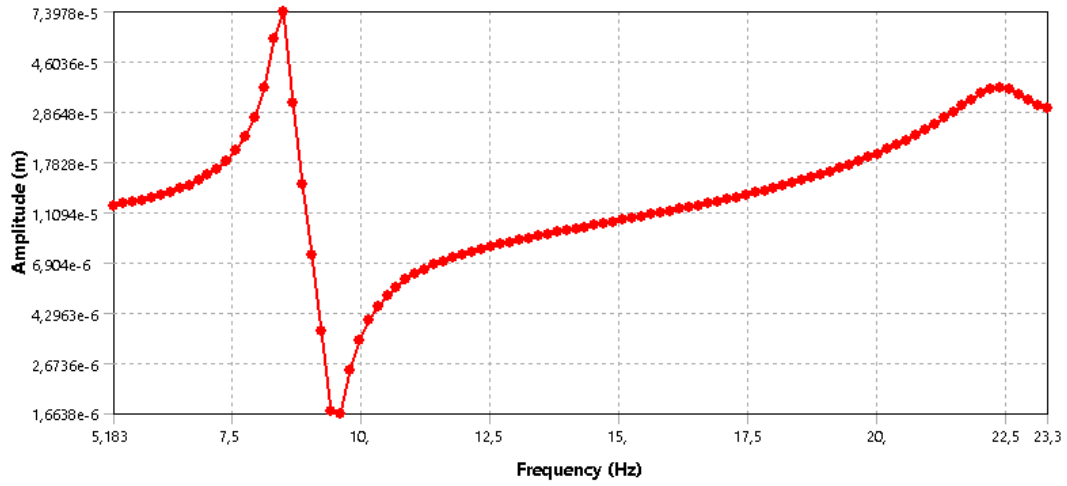


Figura 6.23: *Resposta ao desbalanceamento no domínio da frequência (amplitude).*

A simulação contemplou a faixa espectral de 5 a 24 hertz com uma resolução de $\Delta \omega = 0,19 \text{ Hz}$ e a máxima amplitude foi de aproximadamente $74 \mu.m$, quando $\omega = 8,48 \text{ Hz}$, contudo, o valor de pico ficou abaixo da tolerância A_1 .

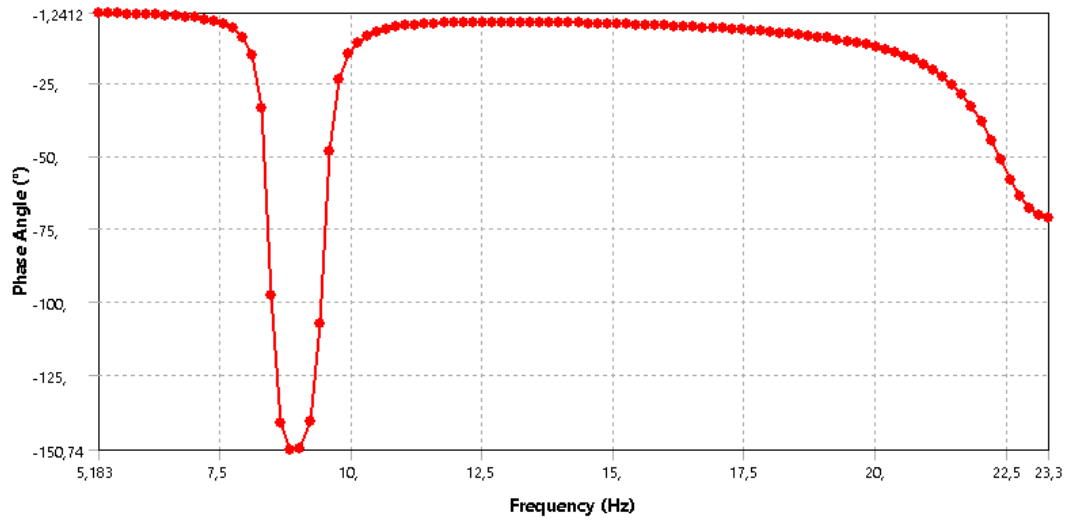


Figura 6.24: *Resposta ao desbalanceamento no domínio da frequência (fase).*

O valor da fase na ressonância, em $\omega = 8,48 \text{ Hz}$ foi de -98 graus .

Capítulo 7

Conclusões e recomendações

Esse trabalho apresenta um estudo sobre as vibrações laterais de linhas de eixo propulsor de navios utilizando procedimentos analíticos e computacionais e chegou-se às seguintes conclusões:

As frequências naturais e os modos de vibração da linha de eixo suportado por mancais flexíveis permitem avaliar algumas de suas características dinâmicas importantes e fornecem dados relevantes para uma melhor compreensão dos fenômenos envolvidos.

É extremamente importante considerar as propriedades elásticas dos elementos estruturais de suporte dos mancais como a fundação, pois eles terão participação na rigidez equivalente do sistema.

No projeto de uma linha de eixo, é importante que a rigidez dos mancais seja menor que a do eixo por duas razões: 1) a baixa rigidez dos mancais impede a propagação das vibrações para outras partes estacionárias do sistema propulsor, pois sendo mais flexível, ele é capaz de absorver essa energia cinética que chega, convertendo em energia potencial. 2) coeficientes de rigidez baixos favorecem o amortecimento, que é imprescindível para reduzir as amplitudes de resposta e principalmente evitar zonas de instabilidade do rotor.

A rigidez dos mancais e os efeitos giroscópicos têm uma grande influência na resposta dinâmica do sistema, sendo que os momentos giroscópicos têm um efeito enrijecedor, aumentando os valores das frequências naturais.

Após identificar as velocidades críticas no Diagrama de Cambell, é importante que o sistema propulsor se distancie desses valores para evitar altas amplitudes de resposta e, se for possível, opere acima delas, onde a massa é dominante na resposta

dinâmica.

Com o desenvolvimento do trabalho, houve uma dificuldade no momento de modelar o amortecimento estrutural do eixo por não se ter valores experimentais como referência. Então, foi percebida a necessidade de ensaios de vibração e medições da resposta através de sensores em posições estratégicas. Informações sobre as características dinâmicas do sistema rotativo, que podem ser obtidas experimentalmente por meio de testes de batida e testes de vibração em velocidade constante, trazem subsídios para a construção de modelos analítico-computacionais mais precisos para a descrição do comportamento dinâmico de rotores em balanço.

As propriedades elásticas nesse estudo foram admitidas a uma temperatura constante e seria interessante para estudos futuros realizar um levantamento mais detalhado de como as características dinâmicas de cada componente do sistema variam com a mudança de temperatura, principalmente a rigidez e o amortecimento no filme de óleo dos mancais hidrodinâmicos. O detalhamento maior das informações do eixo, dos mancais e da fundação podem melhorar significativamente a fidelidade do modelo de uma linha de eixo.

Referências Bibliográficas

- API, A., 2005. “Standard Paragraphs Rotordynamic Tutorial: Lateral Critical Speeds, Unbalance Response, Stability, Train Torsionals, and Rotor Balancing, no”. .
- CATERPILLAR, 2017, *Propulsion system shaft analysis concerning lateral vibration*. Relatório técnico, OCEANA ESTALEIRO S/A.
- DIMENTBERG, M., IOURTCHENKO, D., NAESS, A., 2006, “Coherence function of transverse random vibrations of a rotating shaft”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 292, n. 3, pp. 983–986.
- GAN-BO, Z., YAO, Z., 2012, “Reduced-order modeling method for longitudinal vibration control of propulsion shafting”, *Ieri Procedia*, v. 1, pp. 73–80.
- GENTA, G., 2007, *Dynamics of rotating systems*. Springer Science & Business Media.
- GRZĄDZIELA, A., 2008, “Modelling of propeller shaft dynamics at pulse load”, *Polish Maritime Research*, v. 15, n. 4, pp. 52–58.
- HENDERSON, F. M., 1968, *Description and Usage of General Bending Response Code 3 (GBRC3)*. Relatório técnico, NAVAL SHIP RESEARCH AND DEVELOPMENT CENTER BETHESDA MD APPLIED MATHEMATICS LAB.
- HUANG, Q., YAN, X., WANG, Y., et al., 2016, “Numerical and experimental analysis of coupled transverse and longitudinal vibration of a marine propulsion shaft”, *Journal of Mechanical Science and Technology*, v. 30, n. 12, pp. 5405–5412.
- HUANG, Q., YAN, X., WANG, Y., et al., 2017, “Numerical modeling and experimental analysis on coupled torsional-longitudinal vibrations of a ship’s propeller shaft”, *Ocean Engineering*, v. 136, pp. 272–282.
- HUANG, T. C., HUANG, F. C., 1967, “On precession and critical speeds of two-bearing machines with overhung weight”. ASME.

- JASPER, N. H., 1954, *A design approach to the problem of critical whirling speeds of shaft-disk systems*. Relatório técnico, DAVID TAYLOR MODEL BASIN WASHINGTON DC.
- JEFFCOTT, H. H., 1919, “XXVII. The lateral vibration of loaded shafts in the neighbourhood of a whirling speed.—The effect of want of balance”, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, v. 37, n. 219, pp. 304–314.
- KOROTKIN, A. I., 2008, *Added masses of ship structures*, v. 88. Springer Science & Business Media.
- LALANNE, M., FERRARIS, G., 1998, *Rotordynamics prediction in engineering*. Wiley.
- LI, C., HUANG, X., HUA, H., 2016, “Dynamic modeling and analysis of axial vibration of a coupled propeller and shaft system”, *Journal of Mechanical Science and Technology*, v. 30, n. 7, pp. 2953–2960.
- MEIROVITCH, L., 1986, “Element of Vibration”, *Analysis*, pp. 1–87.
- MUSZYNSKA, A., 1996, “Forward and backward precession of a vertical anisotropically supported rotor”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 192, n. 1, pp. 207–222.
- NETO, A. P. R., 2007, *Vibrações Mecânicas*. Editora E-papers.
- OGUAMANAM, D., 2003, “Free vibration of beams with finite mass rigid tip load and flexural–torsional coupling”, *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 45, n. 6, pp. 963–979.
- RAO, J., 1982, “Conditions for backward synchronous whirl of a flexible rotor in hydrodynamic bearings”, *Mechanism and Machine Theory*, v. 17, n. 2, pp. 143–152.
- VANCE, J. M., ZEIDAN, F. Y., MURPHY, B., 2010, *Machinery vibration and rotordynamics*. John Wiley & Sons.
- WARIKOO, R., HADDARA, M., 1992, “Analysis of propeller shaft transverse vibrations”, *Marine Structures*, v. 5, n. 4, pp. 255–279.
- YU, J., CRAGGS, A., MIODUCHOWSKI, A., 1999, “Modelling of shaft orbiting with 3-D solid finite elements”, *International Journal of Rotating Machinery*, v. 5, n. 1, pp. 53–65.

- ZHANG, C., TIAN, Z., YAN, X., 2016, “1871. Analytical analysis of the vibration of propulsion shaft under hull deformation excitations.” *Journal of Vibroengineering*, v. 18, n. 1.
- ZHANG, G., ZHAO, Y., LI, T., et al., 2014, “Propeller excitation of longitudinal vibration characteristics of marine propulsion shafting system”, *Shock and Vibration*, v. 2014.
- ZOU, D., LIU, L., RAO, Z., et al., 2016, “Coupled longitudinal–transverse dynamics of a marine propulsion shafting under primary and internal resonances”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 372, pp. 299–316.

Apêndice A

Tabela A.1: Dados de entrada

Pontos	X(pol)	Dx(pol)	massa(lbm)	tau(lbm.pol ²)	tauD(lbm.pol ²)	J(pol4)	Iyy = Izz(pol4)	raio(pol)	Ky(lbf/pol)	Kz(lbf/pol)
1	0,00	0,00								
2	16,00		51,90							
3	32,00	32,00		115,76	57,88	12,76	6,38	1,69		
4	48,00		51,90							
5	64,00	32,00		144700,00	72350,00	15944,55	7972,28	10,04		
6	80,00		51,90							
7	96,00	32,00		144700,00	72350,00	15944,55	7972,28	10,04		
8	112,00		2,00							
9	115,00	6,00		115,76	57,88	68,03	34,02	2,57		
10	118,00		11,64							
11	135,50	35,00		298,20	149,10	30,04	15,02	2,09		
12	153,00		11,64						2,57E+09	9,70E+06
13	170,50	35,00		298,20	149,10	30,04	15,02	2,09		
14	188,00		11,64							
15	205,50	35,00		298,20	149,10	30,04	15,02	2,09		
16	223,00		4,99							4,37E+06
17	230,50	15,00		446,60	223,30	104,98	52,49	2,86		
18	238,00		4,99							
19	245,50	15,00		446,60	223,30	104,98	52,49	2,86		
20	253,00		4,99							
21	260,50	15,00		446,60	223,30	104,98	52,49	2,86		
22	268,00		15,00							
23	290,50	45,00		5842,00	2921,00	457,77	228,88	4,13		
24	313,00		10,30							1,31E+06
25	328,50	31,00		2186,00	1093,00	248,65	124,32	3,55		
26	344,00		10,30							
27	359,50	31,00		2186,00	1093,00	248,65	124,32	3,55		
28	375,00		10,30							
29	390,50	31,00		2186,00	1093,00	248,65	124,32	3,55		
30	406,00		10,30							
31	421,50	31,00		2186,00	1093,00	248,65	124,32	3,55		
32	437,00		10,30							
33	452,50	31,00		2186,00	1093,00	248,65	124,32	3,55		
34	468,00		10,30							
35	483,50	31,00		2186,00	1093,00	248,65	124,32	3,55		
36	499,00		10,30							
37	514,50	31,00		2186,00	1093,00	248,65	124,32	3,55		
38	530,00		15,00						1,00E+16	1,00E+16